『すべての人の微分積分学（３刷）』正誤表

p.30 下から７行目．最後の等式の右辺「$= (n+1)^5$」を削除

p.210 「極小値：0（$x = 0$）」→「極小値なし」

p.211 一番上の増減表の中で，$x < 0$ の部分（2 列）を削除

p.246 グラフ (5)．グラフを縦長に（縦軸と横軸のスケールを同じに）

p.246 グラフ (6)．グラフの曲がり具合を x 軸にへばりつくように修正

p.313 24.4(1) と (3) の解答の中辺 $\sum_{n=1}^{\infty} \to \sum_{n=0}^{\infty}$（計 2 箇所）

p.323 式 (25.8) の「$\dfrac{\log t}{t}$」→「$t \log t$」

p.338 一番下の左図．y 切片 $\sqrt{3}$ を追加

p.338 一番下の左図．グラフを横長に（スケールを右図と同じに）

p.338 一番下の右図．グラフの線を太く（他の 3 図と同じに）

発展学習

ここでは，本文中で解説しきれなかったことや，本書の構成上の都合により，学習者に疑問が生じやすいと考えられる事項について補足的な解説をします．本項の内容は，改訂版（第2版）にて本文中に取り入れる予定です．

p.39 定理3.2で$O(g_1)+O(g_2)$という記述がありますが，このような「O記号どうしの和」が本書では未定義です．また，O記号が両辺にある数式の正確な意味も未定義です．これらを正確に述べるには，$f(n)=O(g(n))$の定義を「$f(n)$の次数が$\deg g$以下」という従来のものから一歩進め，「$f(n)$は，次数が$\deg g$以下の多項式の集合に属する」という形にする必要があります．すなわち，次数がd以下の多項式の集合をP_dと置くとき，$f(n)=O(g(n))$を$f\in P_{\deg g}$と定義するのです．そして「O記号どうしの和」は，各集合に属する元の和の集合，すなわち，$f(n)=O(g_1(n))+O(g_2(n))$の定義を，$f=f_1+f_2$ $(f_1\in P_{\deg g_1},\ f_2\in P_{\deg g_2})$なる分解を持つことと定め，さらに，$O$記号が両辺にあるような等式$O(f(n))=O(g(n))$も，$P_{\deg f}\subset P_{\deg g}$（これは$\deg f\le\deg g$と同値）と定義します．このように，集合を用いて定義することにより，たとえば，$O(f_1(n))+O(f_2(n))=O(g_1(n))+O(g_2(n))$は$P_{\deg f_1}+P_{\deg f_2}\subset P_{\deg g_1}+P_{\deg g_2}$と定義できます（ただし$+$で記した集合の和とは，各集合に属する元の和の全体からなる集合を指す）．しかし本書では，集合の議論を持ち出すことによって急に難しく感じてしまう読者が多いだろうとの配慮から，解説は単純な次数の比較にとどめ，あとは読者の想像力で適宜O記号を用いてもらいたいと考えました．

p.49 定理4.1で用いているO記号は，変数が実数であるため第3章で定義したO記号の範囲に属さず，第7章の定義7.1で定義されます．ここで未定義の記号を用いた理由は，定理4.1では「$x\ge 1$」という条件があるため，$O(x^2)$は，第3章で導入したO記号と同じ意味となり「xの2次以下の式」を表すからです．そのため，読者はほとんど違和感を感じないだろうと判断し，このような構成にしました．しかし，理論的には定義7.1を定理4.1の前に置く方が良いと思われますので，次回の改訂の機会にはそのように修正したいと思います．

p.182 15.1(6) $y=\sqrt{x^2-1}$ の漸近線が $y=\pm x$ であることの証明.

グラフが y 軸対称であるから，$x>0$ に制限して漸近線が $y=x$ であることを示す．$x\to\infty$ において，二つのグラフ $y=\sqrt{x^2-1}$ と $y=x$ の差を計算する.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\to 0 \qquad (x\to\infty).\end{aligned}$$

あるいは，テイラー展開を用いた別解も可能.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}-x &= x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)\\ &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^n-1\right)\\ &= x\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^n\\ &= O\left(\frac{1}{x}\right)\to 0 \qquad (x\to\infty).\end{aligned}$$

以上より，二つのグラフは $x\to\infty$ で限りなく近づく.

p.207 16.8(9) $y=\log(x+e^x)$ の漸近線が $y=x$ であることの証明.

二つのグラフ $y=\log(x+e^x)$ と $y=x$ の差を計算する.

$$\begin{aligned}\log(x+e^x)-x &= \log\left(\frac{x+e^x}{e^x}\right)\\ &= \log(1+xe^{-x})\\ &\to \log(1+0)=0 \qquad (x\to\infty).\end{aligned}$$

あるいは，テイラー展開を用いた別解も可能．

$$
\begin{aligned}
\log(x+e^x)-x &= \log\left(e^x\left(\frac{x}{e^x}+1\right)\right)-x \\
&= \log e^x + \log\left(\frac{x}{e^x}+1\right)-x \\
&= \log\left(\frac{x}{e^x}+1\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{x}{e^x}\right)^n \\
&= O\left(\frac{x}{e^x}\right) \to 0 \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}
$$

以上より，二つのグラフは $x\to\infty$ で限りなく近づく．

p. 309 定理 24.5 の証明では，ラグランジュの剰余項 $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \to 0$ $(0 \le c \le x)$ を示す必要があります．その証明が本文に記載されておりませんので，以下に記します．

(24.12) について

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = \frac{e^c}{n!}x^n.$$

ここで，

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n}\frac{x}{n-1}\frac{x}{n-2}\cdots\frac{x}{4}\frac{x}{3}\frac{x}{2}\frac{x}{1}$$

において，x より大きな整数 b を一つ取り，後半の b 個の分数の積を B とおく．$B = \frac{x^b}{b!}$ は定数（すなわち $n \to \infty$ で一定）．よって

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n}\frac{x}{n-1}\frac{x}{n-2}\cdots\frac{x}{b+1} \times B.$$

前半の $n-b$ 個の分数は $\dfrac{b}{k}$ $(k \ge b+1)$ の形だから $\frac{x}{k} \le \frac{x}{b+1}$．よって，$\frac{x^n}{n!} \le B\left(\frac{x}{b+1}\right)^{n-b}$．したがって，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{b+1}\right)^n = 0$. よって，$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$.

(24.13)(24.14) についても同様です．(24.15) は $|x| < 1$ の下では $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n} = 0$ であることからわかります．