

井草ゼータ関数の計算実例

東洋大学 理工学部 生体医工学科

16B0100141 鈴木清佳

1. 序文

ゼータ関数は1737年のオイラーの論文にて登場して以来、数論や代数学、幾何学、解析学、さらに数学に限らず物理学など様々な領域で用いられ、あるいは研究対象そのものとなる関数である[1]。種々のゼータ関数の中において井草ゼータ関数は、20世紀後半に登場し、井草準一[2]、J. Denef [3]、黒川信重ら[4]によって研究が行われた。

本研究では、井草ゼータ関数 $Z_I(s, V)$ において、代数的集合 V が $\{x \mid x = 0\}$, $\{x \mid x^2 = 0\}$, $\{(x, y) \mid xy = 0\}$, $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ であるときの4例について、それぞれリーマン・ゼータ関数で表せるか検証する。なお、 $V = \{x \mid x^2 = 0\}$ のときでは別証についても示す。上記4例について、ハッセ・ゼータ関数 $Z_H(s, V)$ との計算結果の比較を行う。

2. 定義

今回用いる各ゼータ関数の定義である。

リーマン・ゼータ関数は、 $\text{Re}(s) > 1$ において自然数全体にわたる無限和

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

あるいは素数全体にわたる無限積

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p:\text{素数}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}\right)$$

で定義される関数である。

井草ゼータ関数は、 V を代数的集合としたとき、 $\text{Re}(s) > 1$ において

$$Z_I(s, V) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{m^s} = \prod_{p:\text{素数}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |V(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})| p^{-ks} \right).$$

また、ハッセ・ゼータ関数は、 V を代数的集合としたとき、 $\text{Re}(s) > 1$ において

$$Z_H(s, V) = \prod_{p:\text{素数}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{F}_{p^m})|}{mp^{ms}}\right)$$

でそれぞれ定義される関数である。

3. 結果

定理 1

$$\text{井草ゼータ関数 } Z_I(s, V) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{m^s} \text{ について}$$

$$(1) V_1 = \{x \mid x = 0\} \text{ のとき} \quad Z_I(s, V_1) = \zeta(s).$$

$$(2) V_2 = \{x \mid x^2 = 0\} \text{ のとき} \quad Z_I(s, V_2) = \frac{\zeta(2s-1)\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

$$(3) V_3 = \{(x, y) \mid xy = 0\} \text{ のとき} \quad Z_I(s, V_3) = \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}.$$

$$(4) V_4 = \{(x, y) \mid xy = 1\} \text{ のとき} \quad Z_I(s, V_4) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

定理 2

$$\text{ハッセ・ゼータ関数 } Z_H(s, V) = \prod_{p:\text{素数}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{F}_{p^m})|}{mp^{ms}}\right) \text{ について}$$

$$(1) V_1 = \{x \mid x = 0\} \text{ のとき} \quad Z_H(s, V_1) = \zeta(s).$$

$$(2) V_2 = \{x \mid x^2 = 0\} \text{ のとき} \quad Z_H(s, V_2) = \zeta(s).$$

$$(3) V_3 = \{(x, y) \mid xy = 0\} \text{ のとき} \quad Z_H(s, V_3) = \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}.$$

$$(4) V_4 = \{(x, y) \mid xy = 1\} \text{ のとき} \quad Z_H(s, V_4) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

4. 証明

定理 1 (1)

井草ゼータ関数 $Z_I(s, V) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{m^s}$ について

$$V_1 = \{x \mid x = 0\} \text{ のとき } \quad Z_H(s, V_1) = \zeta(s).$$

証明

$x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ において、 $x = 0$ となる解は 0 の 1 つのみであるから、

$$V_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid x = 0\} = \{0\}.$$

よって、 $|V_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = 1$ から、

$$Z_I(s, V_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \zeta(s)$$

が成り立つ。

また同様にして定理 2 (1)、(2) の証明もなされる。

定理 1 (2)

井草ゼータ関数 $Z_I(s, V) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{m^s}$ について

$$V_2 = \{x \mid x^2 = 0\} \text{ のとき } \quad Z_I(s, V_2) = \frac{\zeta(2s-1)\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

証明

$V_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid x^2 = 0\}$. $|V_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})|$ を求める。

$$k = 0 \text{ のとき、 } x = 0 \text{ より } \quad |V_2(\mathbb{Z}/p^0\mathbb{Z})| = 1.$$

$$k = 1 \text{ のとき、 } x = 0 \text{ より } \quad |V_2(\mathbb{Z}/p^1\mathbb{Z})| = 1.$$

$$k = 2 \text{ のとき、 } x = 0, p \cdot 1, \dots, p(p-1) \text{ より } \quad |V_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})| = p.$$

$$k = 3 \text{ のとき、 } x = 0, p^2 \cdot 1, \dots, p^2(p-1) \text{ より } \quad |V_2(\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})| = p.$$

$$k = 4 \text{ のとき、 } x = 0, p^2 \cdot 1, \dots, p^2(p^2-1) \text{ より } \quad |V_2(\mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z})| = p^2.$$

⋮

$$k = 2t-1 \text{ のとき、 } x = 0, p^t \cdot 1, \dots, p^t(p^{t-1}-1) \text{ より } \quad |V_2(\mathbb{Z}/p^{2t-1}\mathbb{Z})| = p^{t-1}.$$

$$k = 2t \text{ のとき、 } x = 0, p^t \cdot 1, \dots, p^t(p^t-1) \text{ より } \quad |V_2(\mathbb{Z}/p^{2t}\mathbb{Z})| = p^t.$$

したがって

$$\begin{aligned}
 Z(s, V) &= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} p^{t-1} \cdot p^{-(2t-1)s} + \sum_{t=1}^{\infty} p^t \cdot p^{-2ts} \right) \\
 &= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \frac{p^{-s}}{1-p^{1-2s}} + \frac{p^{1-2s}}{1-p^{1-2s}} \right) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1+p^{-s}}{1-p^{1-2s}} \\
 &= \prod_{p:\text{素数}} \left(\frac{1}{1-p^{1-2s}} \cdot \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}} \right).
 \end{aligned}$$

よって

$$Z(s, V) = \frac{\zeta(2s-1) \cdot \zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

が成り立つ。

この証明方法は、文献[5]で用いられており、そこではより一般の「 $x^r = 0$ (r は任意の自然数)」に対する井草ゼータ関数を求めている。

本論文では以下に定理 1 (2) の別証を与える。

別証

任意の自然数 n に対して、 $n = k^2 d$ ($d = \text{square free}$, k は自然数) の形に、ただ一通りに表せる。

このとき、 $x \equiv 0 \pmod{n}$ の解は、 $x \equiv 0, kd, 2kd, 3kd, \dots, (k-1)kd \pmod{n}$ の k 個あるので、

$$Z_I(s, V_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d:\text{sf}} \frac{k}{(k^2 d)^s} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s-1}} \right) \left(\sum_{d:\text{sf}} \frac{1}{d^s} \right) = \zeta(2s-1) \sum_{d:\text{sf}} \frac{1}{d^s}.$$

ここで、 $\sum_{d:\text{sf}} \frac{1}{d^s} = X$ とおくと、

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n:\text{not sf}} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \right) \left(\sum_{d:\text{sf}} \frac{1}{d^s} \right) = \zeta(s) - (\zeta(2s) - 1)X.$$

よって $X = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ から、

$$Z_I(s, V_2) = \zeta(2s - 1) \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

となる。

なお、この方法ではリーマン・ゼータ関数をオイラー積表示で求めることは難しい為、他の方程式においても有効とは限らない。以下に証明するように、 V_3 と V_4 に対しては、井草ゼータ関数のオイラー積表示を用い、各素数 p に対するオイラー因子を計算する方法によって証明した。

定理 1 (3)

井草ゼータ関数 $Z_I(s, V) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{m^s}$ について

$$V_3 = \{(x, y) \mid xy = 0\} \text{ のとき } Z_I(s, V_3) = \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)} .$$

証明

$$V_3(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{(x, y) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2 \mid xy = 0\} . \quad |V_3(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})| \text{ を求める。}$$

1) $x = 0$ のとき、 y は $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ の任意の元でよいので、 (x, y) の組は p^k 個である。

2) $x \neq 0$ のとき、 $x = ap^l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, k-1$) とする。

a は $0, 1, 2, \dots, p^{k-l} - 1$ のうち p の倍数でないものなので、 $p^{k-l} - p^{k-l-1}$ 通りある。この x に対し、 $y = bp^n$ とおくと、 $n = k-1, k-2, \dots, k-l$ の l 個の値それぞれにおいて $y \neq 0$ (即ち $b \neq 0$) となるものは、

$$\begin{aligned} n = k-1 \text{ のとき } & b \text{ は } (p-1) \text{ 通り} \\ n = k-1 \text{ のとき } & b \text{ は } (p^2-p) \text{ 通り} \\ & \vdots \\ n = k-l \text{ のとき } & b \text{ は } (p^l - p^{l-1}) \text{ 通り} \end{aligned}$$

の合計 p^l 通り、それ以外に共通の n に対して $b = 0$ が 1 通り。

したがって、 $x \neq 0$ のとき、 (x, y) の組の総数は、

$$\sum_{l=0}^{k-1} (p^k - p^{k-1}) = k(p^k - p^{k-1}) \text{ 個。}$$

1) , 2) より、

$$|V_3(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})| = k(p^k - p^{k-1}) + p^k = (k+1)p^k - kp^{k-1} \quad (k \geq 1).$$

$$\begin{aligned} Z_I(s, V_3) &= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)p^k - kp^{k-1}}{p^{ks}} \right) \\ &= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \frac{p^{1-s}}{(1-p^{1-s})^2} + \frac{p^{1-s}}{1-p^{1-s}} + \frac{1}{p} \cdot \frac{p^{1-s}}{(1-p^{1-s})^2} \right) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1-p^{-s}}{(1-p^{1-s})^2}. \end{aligned}$$

よって

$$Z_I(s, V_3) = \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}$$

となる。

定理 1 (4)

井草ゼータ関数 $Z_I(s, V) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{m^s}$ について

$$V_4 = \{(x, y) \mid xy = 1\} \text{ のとき } \quad Z_I(s, V_4) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

証明

$$V_4(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{(x, y) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2 \mid xy = 1\}. \quad |V_4(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})| \text{ を求める。}$$

つまり、 $xy = 1$ になる y が存在するような x の個数を求めればよい。

$xy = 1$ になる y が $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ 内に存在する。

$\Leftrightarrow x$ の逆元が $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ 内に存在する。

$\Leftrightarrow x \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$.

よって、 $|V_4(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})| = |(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times| = \varphi(p^k) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)p^k$ となるので、

$$\begin{aligned}
Z_I(s, V_4) &= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right) p^k}{p^{ks}} \right) = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=1}^{\infty} p^{k(1-s)} \right) \\
&= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{p^{1-s}}{1 - p^{1-s}} \right) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1 - p^{1-s} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{-s}}{1 - p^{1-s}} \\
&= \prod_{p:\text{素数}} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}}.
\end{aligned}$$

したがって

$$Z_I(s, V_4) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

となる。

定理 2 (3)

ハッセ・ゼータ関数 $Z_H(s, V) = \prod_{p:\text{素数}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{F}_{p^m})|}{mp^{ms}}\right)$ について

$$V_3 = \{(x, y) \mid xy = 0\} \text{ のとき } \quad Z_H(s, V_3) = \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}.$$

証明

$$V_3(\mathbb{F}_{p^m}) = \{(x, y) \in (\mathbb{F}_{p^m})^2 \mid xy = 0\}. \quad |V_3(\mathbb{F}_{p^m})| \text{ を求める。}$$

$(x, y) = (0, y)$ (ただし $y = 0$ を除く)、あるいは $(x, y) = (x, 0)$ (ただし $x = 0$ を除く)、または、 $(x, y) = (0, 0)$ の組の個数である。

$(x, y) = (0, y)$ (ただし $y = 0$ を除く) の組の個数は、 $p^m - 1$ 個。

$(x, y) = (x, 0)$ (ただし $x = 0$ を除く) の組の個数は、 $p^m - 1$ 個。

$(x, y) = (0, 0)$ の組の個数は、1 個。

よって $|V_3(\mathbb{F}_{p^m})| = 2p^m - 1$ となるので、

$$Z_H(s, V_3) = \prod_{p:\text{素数}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2p^m - 1}{mp^{ms}}\right) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1 - p^{-s}}{(1 - p^{1-s})^2}.$$

したがって

$$Z_H(s, V_3) = \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}$$

となる。

定理 2 (4)

ハッセ・ゼータ関数 $Z_H(s, V) = \prod_{p:\text{素数}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V(\mathbb{F}_{p^m})|}{mp^{ms}}\right)$ について

$$V_4 = \{(x, y) \mid xy = 1\} \text{ のとき} \quad Z_H(s, V_4) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

証明

$$V_4(\mathbb{F}_{p^m}) = \{(x, y) \in (\mathbb{F}_{p^m})^2 \mid xy = 0\}. \quad |V_4(\mathbb{F}_{p^m})| \text{ を求める。}$$

定理 1 (4) と同様にして、 $xy = 1$ になる y が存在するような x の個数を求めればよい。

$xy = 1$ になる y が \mathbb{F}_{p^m} 内に存在する。

$\Leftrightarrow x$ の逆元が \mathbb{F}_{p^m} 内に存在する。

$\Leftrightarrow x \in (\mathbb{F}_{p^m})^\times$.

よって、 $|V_4(\mathbb{F}_{p^m})| = |(\mathbb{F}_{p^m})^\times| = p^m - 1$ となるので、

$$Z_H(s, V_4) = \prod_{p:\text{素数}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^m - 1}{mp^{ms}}\right) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}}.$$

したがって

$$Z_H(s, V_4) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

となる。

5. まとめ

上記の結果を以下の表にまとめる。

表：各 V に対する井草ゼータ関数とハッセ・ゼータ関数

V	$Z_I(s, V)$	$Z_H(s, V)$
$V_1 = \{x \mid x = 0\}$	$\zeta(s)$	$\zeta(s)$
$V_2 = \{x \mid x^2 = 0\}$	$\frac{\zeta(2s-1)\zeta(s)}{\zeta(2s)}$	$\zeta(s)$
$V_3 = \{(x, y) \mid xy = 0\}$	$\frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}$	$\frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}$
$V_4 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$	$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$	$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$

V_1 のとき、井草ゼータ関数、ハッセ・ゼータ関数はともに $x = 0$ となる解は0の1つのみであるため、計算結果はどちらも $\zeta(s)$ と表せる。また同様の理由から V_2 のとき、ハッセ・ゼータ関数も $\zeta(s)$ となり、これは V_2 のときの井草ゼータ関数の計算結果と異なる。

一方、 V_3 、 V_4 の2変数の場合では井草ゼータ関数、ハッセ・ゼータ関数は同じ計算結果となった。定義の異なる二つの関数が同じ値となる理由は本研究の計算例ではわからなかったが、今後、井草ゼータ関数およびハッセ・ゼータ関数が研究されていく過程において明かされることを期待している。

6. 参考文献

- [1] 黒川信重『ゼータの冒険と進化』現代数学社(2014).
- [2] 井草準一「局所ゼータ関数について」『数学』vol. 46 (1994), No. 1, 23-38.
- [3] J. Denef, Report on Igusa's local Zeta function, Sem. Bourbaki, 741 (1991), 1-25.
- [4] 黒川信重・若山正人『絶対カシミアル元』岩波書店(2002).
- [5] 木村匠「多重点の井草ゼータ関数」東京工業大学修士論文(2010).