目 次

1 導入 **2**

2 定義と性質 **5**

3 証明 **8**

3.1 Poincaré 級数の変形 8
3.2 Poincaré 級数や Eisenstein 級数の性質 18
3.3 Eisenstein 級数の変形 20
3.4 内積の計算 1 33
3.5 内積の計算 2 40
3.6 定理の証明 61

1　導入

最初に、具体的に計算されているクズネツォフ公式を、定理 1.1 と定理 1.2 として、2 つ紹介する。

上半平面を $\mathcal{H} = \{z = (x, y) \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$ とし、$\Gamma = SL(\ 2, \mathbf{Z}\ )$ とする。$\mathcal{H}$ に Γ を 1 次分数変換で作用させたときの基本領域について、以下のクズネツォフ公式が成立する。

定理 1.1 [Kuznecov, p.302-303 Thm.1]
$1 \leq \forall m, \forall n \in \mathbf{Z}$ とする。また、関数 $h(r)$ は偶関数、かつ、$\delta_1 > \frac{1}{2}$ のとき、$\mid \mathrm{Im}\ r \mid \leq \delta_1$ において正則で、かつ、$\mid r \mid \to \infty$ かつ $\mid \mathrm{Im}\ r \mid \leq \delta_1$ のとき、ある $\delta_2 > 0$ に対して、$\mid h(r) \mid = O(\mid r \mid^{-2-\delta_2})$ を満たすようなものとする。 このとき、

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(n)}\rho_j(m)}{\cosh(\ \pi\kappa_j)} h(\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\ \frac{m}{n}\ \right)^{ir} \sigma_{2ir}(n)\sigma_{-2ir}(m) \frac{h(r)}{\mid \zeta(\ 1+2ir\ ) \mid^2}\ dr$$
$$= \quad \frac{\delta_{n,m}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} r\tanh(\ \pi r\ ) h(r)\ dr + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(\ n, m; c\ )}{c}\varphi\left(\ \frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\ \right)$$

が成立する。

但し、Laplacian を $\Delta = -y^2\left(\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ \right)$ とする。Δ を $L^2(\ \Gamma\backslash\mathcal{H}\ )$ に作用させる。$\Delta\psi_j = \lambda_j\psi_j\ (\psi_j \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}))$ が成立するとき、この λ_j を Δ の固有値と定義し、ψ_j を Δ の固有関数と定義する。λ_j は j について非減少とする。このとき、$\kappa_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}$ とおく。$\rho_j(\cdot)$ は ψ_j の Fourier 係数である。$\sigma_\nu(n) = \sum_{d|n} \mid d \mid^\nu$ とし、$\zeta(s)$ は Riemann-zeta 関数である。Kloosterman 和 $S(\ n, m; c\ )$ を　$0 \neq c \in \mathbf{Z}$ とすると、

$$S(\ n, m; c\ ) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq |c| \\ (\ c, d\ ) = 1 \\ dd' \equiv 1 \bmod c}} e^{2\pi i\left(\ \frac{nd}{c} + \frac{md'}{c}\ \right)}$$

で定義する。$\delta_{n,m}$ は Kronecker symbol である。$\varphi(\cdot)$ は、$h(r)$ と J-Bessel 関数の積分である。

次に、2 つ目のクズネツォフ公式を紹介する。3 次元上半空間 $\mathcal{H}^3 = \{\ (\ x_1 + x_2 i\ ,\ y\ ) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}, y > 0\ \}$ とし、Gauss 整数を $\mathbf{Z}[i] = \{\ a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\ \}$ と定義する。$\Gamma = SL(\ 2, \mathbf{Z}[i]\ )$ とする。このとき、$\mathcal{H}^3$ に Γ を 1 次分数変換で作用させたときの基本領域を Picard 多様体という。この Picard 多様体について、以下のクズネツォフ公式が成立する。

定理 1.2 [本橋 1 , p. 268 Thm.]
$l \neq 0$ かつ $l, m, n \in \mathbf{Z}[i]$ のとき、Kloosterman 和 $S(\ m, n; l\ )$ を

$$S(\ m, n; l\ ) = \sum_{\substack{v \bmod l \\ (\ v, l\ ) = 1 \\ vv' \equiv 1 \bmod l}} e^{2\pi i[\ m, \frac{v}{l}\ ]} e^{2\pi i[\ n, \frac{v'}{l}\ ]}$$

と定義する。但し、$[\ \cdot,\cdot\ ]$ は $\mathbf{R}^2$ の通常の内積である。

$0 \neq m,n \in \mathbf{Z}[i]$ かつ $r \in \mathbf{C}$ とする。関数 $h(r)$ は偶関数かつ、ある $\varepsilon > 0$ に対して、$|\ \mathrm{Im}\ \ r\ |< \frac{1}{2}+\varepsilon$ において正則で、かつ、$h(r) \ll (\ 1+ |\ r\ |\ )^{-3-\varepsilon}$ を満たすようなものとする。このとき、

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\pi\kappa_j)}\kappa_j h(\kappa_j) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{ir}(m)\sigma_{ir}(n)}{|\ mn\ |^{ir}|\ \zeta_K(1+ir)\ |^2} h(r)\ dr$$
$$= \quad \pi^{-2}(\ \delta_{m,n}+\delta_{m,-n}\ ) \int_{-\infty}^{\infty} r^2 h(r)\ dr + \sum_{0\neq l \in \mathbf{Z}[i]} |\ l\ |^{-2}\ S(\ m,n;l\ )\check{h}(2\pi\varpi)$$

が成立する。

但し、Laplacian を $\Delta = -y^2\Big((\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2 \Big) + y\ (\frac{\partial}{\partial y})$ と定義する。Δ を $L^2(\ \Gamma\backslash\mathcal{H}^3\ )$ に作用させる。$\Delta\psi_j = \lambda_j\psi_j$ $(\psi_j \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}^3))$ が成立するとき、この λ_j を Δ の固有値と定義し、ψ_j を Δ の固有関数と定義する。λ_j は j について非減少とする。このとき、λ_j は実数 κ_j を用いて、$\lambda_j = \kappa_j^2+1$ とおける。$\varpi^2 = \frac{\overline{mn}}{l^2}$ である。$\check{h}(t)$ は $h(r)$ と J-Bessel 関数の積分である。$\sigma_\nu(n) = \frac{1}{4}\sum_{d|n\ ,\ d\in\mathbf{Z}[i]} |\ d\ |^{2\nu}$ と定義する。$K = \mathbf{Q}(i)$ とし、$\zeta_K(\cdot)$ は Dedekind zeta 関数である。

では、本論文の主定理を述べる。$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおき、$\mathbf{Z}[\omega] = \{\ a+b\omega\ \ |\ a,b \in \mathbf{Z}\ \}$ と定義すると、$\mathbf{Z}[\omega]$ は類数 1 の虚 2 次体 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ の整数環である。この場合のクズネツォフ公式の存在は、Miatello-Wallach によって証明されている。そこで、本論文では同じ類数 1 の虚 2 次体 $\mathbf{Q}(i)$ の整数環におけるクズネツォフ公式を導いた定理 1.2 の過程を参考にする。$\Gamma = SL(\ 2,\mathbf{Z}[\omega]\ )$ とする。このとき、$\mathcal{H}^3$ に Γ を 1 次分数変換で作用させたときの基本領域を Bianchi 多様体という。本論文では、この Bianchi 多様体について、クズネツォフ公式を証明した。

まず、記号を定義する。

$\mathcal{H}^3 = \{\ z = x+y\jmath\ |\ \jmath^2 = -1$ かつ $i\jmath = -\jmath i\ \}$ という形にも書ける。LaplacianΔ を定理 1.2 と同様に定義する。Δ を $L^2(\ \Gamma\backslash\mathcal{H}^3\ )$ に作用させる。$\Delta\psi_j = \lambda_j\psi_j$ $(\psi_j \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}^3))$ が成立するとき、この λ_j を Δ の固有値と定義し、ψ_j を Δ の固有関数と定義する。λ_j は j について非減少とする。このとき、$1 \leq \lambda_j$ となる ψ_j について、以下が成り立つ。

補題 1.3 [Sarnak, p.264 (2.20)]
$\psi_j(z)$ は以下のように Fourier 展開できる。

$$\psi_j(z) = y \sum_{n\in\mathbf{Z}[\omega]^*} \rho_j(n) K_{i\kappa_j}(\ 2\pi\ |\ n\ |\ y\ ) e(\ [\ n,x\ ]\ )\ .$$

但し、$K_{i\kappa_j}$ は K-Bessel 関数であり、右辺の記号は $\kappa_j^2 = \lambda_j - 1$ とし、$e(\ [\ n,x\ ]\ ) := e^{2\pi i[\ n,x\ ]}$ と定義する。

次に、$\mathbf{Z}[\omega]$ の dual lattice を定義する。

定義 1.4 $\mathbf{Z}[\omega]$ の dual lattice を $\mathbf{Z}[\omega]^*$ と書き、$\mathbf{Z}[\omega]^* = \{\ x \in \mathbf{C}\ \mid\ \forall c \in \mathbf{Z}[\omega]\ ,\ [\ c, x\ ] \in \mathbf{Z}\}$ と定義する。

次に、$\sigma_\nu(n)$ と $\sigma'_\nu(n)$ を定義する。

定義 1.5 $n \in \mathbf{Z}[\omega]$ のとき、

$$\sigma_\nu(n) := \frac{1}{6} \sum_{\frac{n}{d} \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ d\ |^{2\nu} \quad .$$

と定義し、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ のとき、

$$\sigma'_\nu(n) := \frac{1}{6} \sum_{\frac{n}{d} \in \mathbf{Z}[\omega]^*} |\ d\ |^{2\nu} \quad .$$

と定義する。

次に、Dedekind zeta 関数を定義する。

定義 1.6 Re $s > 1$ であるような $s \in \mathbf{C}$ を考える。Dedekind zeta 関数 $\zeta_K(s)$ を以下のように定義する。

$$\zeta_K(s) := \sum_{(0) \neq (l) \subset \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{N\ (\ (l)\ )^s}$$

次に、Kloosterman 和を定義する。

定義 1.7 $\mathbf{Z}[\omega]$ に対する、Kloosterman 和 $S(\ m, n; l\ )$ を以下のように定義する。

$$S(\ m, n; l\ ) := \sum_{\substack{v\ mod\ (l) \\ (\ v, (l)\ ) = (1) \\ vv^* \equiv 1\ mod\ (l) \\ m, n \in \mathbf{Z}[\omega]^*}} e\left(\ [\ m, \frac{v}{l}\ ]\ \right) e\left(\ [\ n, \frac{v^*}{l}\ ]\ \right) \ .$$

以下に本論文の主定理を述べる。

定理 1.8 $0 \neq m, n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とし、$r \in \mathbf{C}$ とする。関数 $h(r)$ は偶関数かつ、ある $\varepsilon > 0$ に対して、$|$ Im $r\ | < \frac{1}{2} + \varepsilon$ において正則で、かつ、$h(r) \ll (\ 1 + |\ r\ |\ )^{-4-\varepsilon}$ を満たすようなものとする。このとき、

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\pi\kappa_j)} \kappa_j h(\kappa_j) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\ n\ |}{|\ m\ |} \right)^{ir} \frac{\sigma'_{ir}(m)\sigma'_{-ir}(n)}{|\ \zeta_K(1+ir)\ |^2} h(r)\ dr \\ = \ &\pi^{-2}(\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) \int_{-\infty}^{\infty} r^2 h(r)\ dr + \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-2}\ S(m, n; l) \check{h}(2\pi\varpi) \end{aligned}$$

が成立する。
但し、

$$\check{h}(t) = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^2}{\sinh(\pi r)} \mathcal{J}_{ir}(t) h(r)\ dr$$

と定義し、$\mathcal{J}_\nu(t)$ は $t, \nu \in \mathbf{C}$ のとき、

$$\mathcal{J}_\nu(t) = 2^{-2\nu} \mid t \mid^{2\nu}\ J_\nu^*(t) J_\nu^*(\bar{t})$$

と定義する。さらに、右辺の $J_\nu^*(t)$ は $0 < t \in \mathbf{R}$ のとき、

$$J_\nu^*(t) = J_\nu(t) \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu}$$

となるものを $t \in \mathbf{C}$ になるように拡張した式である。

主定理において、$h(r)$ の条件は、[Kuznecov, p.324-329] と同様に計算すれば、$h(r) \ll (\ 1 + \mid r \mid\ )^{-3-\varepsilon}$ のように緩められると予想される。

この定理 1.8 を証明している本論文は、以下のように構成されている。第 1 節において、これまでに得られていたクズネツォフ公式を説明し、本論文の主定理を述べる。第 2 節において、3 次元上半空間や Poincaré 級数などの性質を述べる。第 3 節において、定理 1.8 の証明への準備と定理 1.8 の証明を述べる。

2 定義と性質

$\mathcal{H}^3$ に距離と体積要素を定義する。

定義 2.1 [Elstrodt etc., p.2 (1.4)]
$\mathcal{H}^3$ における距離を $\frac{(\ (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dy)^2\ )^{\frac{1}{2}}}{y}$ と定義する。

定義 2.2 [Elstrodt etc., p.2 (1.5)]
$\mathcal{H}^3$ における体積要素 $d\mu(z)$ を $\frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3}$ と定義する。

$\mathcal{H}^3$ の各点からの写像を定義する。

定義 2.3 $\mathcal{H}^3$ の各点からの写像 $T(\mathcal{H}^3)$ を以下のように定義する。

$T(\mathcal{H}^3) := \{\ z \mapsto (\ az + b\ ) \cdot (\ lz + h\ )^{-1} \mid ah - bl = 1$ を満たす $a, b, l, h \in \mathbf{C}\ \}$.

この写像 $T(\mathcal{H}^3)$ を具体的に計算すると、以下のようになる。

補題 2.4

$$z = (\ x, y\ ) \mapsto \left(\ \frac{(\ az + b\ )(\ \overline{lz + h}\ ) + a\bar{l}y^2}{\mid lx + h \mid^2 + \mid ly \mid^2}, \frac{y}{\mid lx + h \mid^2 + \mid ly \mid^2}\ \right).$$

写像 $T(\mathcal{H}^3)$ について、以下が成り立つ。

補題 2.5 [Elstrodt etc., p.2,3]

$$T(\mathcal{H}^3) \cong SL(\ 2, \mathbf{C}\ )/\{\pm 1\}\ .$$

$PSL(\ 2, \mathbf{C}\ ) = SL(\ 2, \mathbf{C}\ )/\{\pm 1\}$ とおく。このとき、$\mathcal{H}^3$ の距離、体積要素 $d\mu(z)$ と LaplacianΔ について、以下が成立する。

補題 2.6 [Elstrodt etc., p.5 Prop.1.3, p.8 (1.21)]
$\mathcal{H}^3$ の距離、体積要素 $d\mu(z)$ と LaplacianΔ は、$PSL(\ 2, \mathbf{C}\ )-$ 不変である。

$PSL(\ 2, \mathbf{Z}[\omega])$ の $\mathcal{H}^3$ への作用について、以下が成立する。

補題 2.7 [Elstrodt etc., p.34 Thm.1.2, p.311 Thm.1.1]
$PSL(\ 2, \mathbf{Z}[\omega])$ は $\mathcal{H}^3$ に不連続に作用する。

補題 2.7 より、$\mathcal{H}^3$ に $PSL(\ 2, \mathbf{Z}[\omega])$ を作用させたときの基本領域を考える。
まず、記号 $\mathcal{B}_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)}$、$F_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)}$ と $\mathcal{F}$ を定義する。

定義 2.8 [Elstrodt etc., p.318 Def.3.1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)} &:= \left\{ x + y\jmath \in \mathcal{H}^3 \ \middle|\ \langle\ l, h\ \rangle = \mathbf{Z}[\omega] \text{ となる } \forall l, \forall h \in \mathbf{Z}[\omega] \text{ で、} |\ lx + h\ |^2 + |\ ly\ |^2 \geq 1 \text{ が成立。} \right\}\ , \\
F_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)} &:= \left\{ x \in \mathbf{C} \ \middle|\ 0 \leq \mathrm{Re}\ x \text{ かつ } \frac{\sqrt{3}}{3} \mathrm{Re}\ x \leq\ \mathrm{Im}\ x \text{ かつ } \mathrm{Im}\ x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(\ 1 - \mathrm{Re}\ x\ ) \right\} \\
&\quad \cup \left\{ x \in \mathbf{C} \ \middle|\ 0 \leq \mathrm{Re}\ x \leq \frac{1}{2} \text{ かつ } -\frac{\sqrt{3}}{3} \mathrm{Re}\ x \leq \mathrm{Im}\ x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \mathrm{Re}\ x \right\}\ , \\
\mathcal{F} &:= \left\{ x + y\jmath \in \mathcal{B}_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)} \ \middle|\ x \in F_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)} \right\}\ .
\end{aligned}$$

ただし、$\mathcal{B}_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)}$ の定義に出てくる $\langle\ l, h\ \rangle$ は、l と h が $\mathbf{Z}[\omega]$ 上で張る空間を指す。この定義はここのみで使用する。

このとき、これらの記号を用いると、以下が成立する。

補題 2.9 [Elstrodt etc., p.319 Thm.3.4]
$\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}^3$ 上 $PSL(\ 2, \mathbf{Z}[\omega]\ )$ の基本領域である。

基本領域 $\mathcal{F}$ の体積 $|\ \mathcal{F}\ |$ について、以下が成立する。

補題 2.10 [Elstrodt etc., p.311,312 Thm.1.1]

$$|\ \mathcal{F}\ | = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi^2} \zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{3}i)}(2)\ <\ \infty\ .$$

L^2 内積を定義するために、まず、$\mathcal{F}$ 上の L^2 空間を以下のように定義する。

定義 2.11 $\mathcal{F}$ 上の L^2 空間 $L^2(\ \mathcal{F}, d\mu(z)\ )$ を以下のように定義する。

$$L^2(\ \mathcal{F}, d\mu(z)\ ) := \left\{ f \;\middle|\; \mathcal{H}^3\text{上}\ SL(\ 2, \mathbf{Z}[\omega]) - \text{不変、かつ} \int_{\mathcal{F}} \mid f \mid^2 \ d\mu(z) \ < \ \infty \right\} .$$

L^2 内積を定義する。

定義 2.12 $f_1, f_2 \in L^2(\ \mathcal{F}, d\mu(z)\ )$ とする。このとき、内積 $\langle\ f_1, f_2\ \rangle$ を以下のように定義する。

$$\langle\ f_1, f_2\ \rangle := \int_{\mathcal{F}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\ d\mu(z)\ .$$

Eisenstein 級数を定義する。

定義 2.13 Eisenstein 級数 $E(\ z, s\ )$ を以下のように定義する。

$$E(\ z, s\ ) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s(\ \gamma(z)\ )\ .$$

但し、$s \in \mathbf{C}$ である。$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ l & h \end{pmatrix} \in \Gamma$ とし、$\gamma(z) := (\ az{+}b\ ){\cdot}(\ lz{+}h\ )^{-1}$ とおく。$x(\ \gamma(z)\ )$ を $\gamma(z)$ の x 成分とし、$y(\ \gamma(z)\ )$ を $\gamma(z)$ の y 成分とする。cusp $\infty\jmath$ での固定群 Γ_∞ を

$$\Gamma_\infty := \{\ \gamma \in \Gamma\ \mid\ \gamma(\ \infty\jmath\ ) = \infty\jmath\ \}$$

と定義する。

固定群 Γ_∞ を具体的に計算すると以下のようになる。

補題 2.14

$$\Gamma_\infty \cong \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \pm \begin{pmatrix} \overline{\omega} & b_2 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}\ ,\ \pm \begin{pmatrix} \omega & b_3 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}\ ,\ b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{Z}[\omega] \right\} \Big/ \{\ \pm 1\ \}\ .$$

Poincaré 級数を定義する。

定義 2.15 Poincaré 級数 $P_m(\ z, s\ )$ を以下のように定義する。

$$P_m(\ z, s\ ) := \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^s(\ \gamma(z)\ )\ \exp\{\ -2\pi \mid m \mid y(\ \gamma(z)\ ){+}2\pi i[\ m, x(\ \gamma(z)\ )\ ]\ \}$$

但し、Γ_t を

$$\Gamma_t := \{\ z \mapsto z + b\ ,\ b \in \mathbf{Z}[\omega]\ \}$$

と定義する。

L^2 内積について、以下の Parseval 公式が成り立つ。

補題 2.16 $f_1, f_2 \in L^2(\ \mathcal{F}, d\mu(z)\ )$ のとき、

$$\langle\ f_1, f_2\ \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle\ f_1, \psi_j\ \rangle \overline{\langle\ f_2, \psi_j\ \rangle} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\ t, f_1\ ) \overline{\mathcal{E}(\ t, f_2\ )}\ dt\ .$$

但し、

$$\begin{aligned} \psi_0 &\equiv \mid \mathcal{F} \mid^{-\frac{1}{2}}\ , \\ \mathcal{E}(\ t, f\ ) &:= \int_{\mathcal{F}} f(z) E(\ z, 1-it\ )\ d\mu(z) \end{aligned}$$

とする。

3 証明

3.1 Poincaré 級数の変形

Poincaré 級数は、以下のように変形できる。

命題 3.1

$$\begin{aligned} P_m(\ z, s\ ) &= y^s\ \exp(\ -2\pi \mid m \mid y\ ) \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m, \rho x\ ]} \\ &+ \frac{1}{2} y^{2-s} \sum_{m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ m_2, x\ ]} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \mid l \mid^{-2s} S(\ m, m_2; l\ ) A_s(\ m, m_2; l; y\ )\ . \end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned} \eta &:= \eta_1 + \eta_2 i\ . \\ A_s(\ m, m_2; l; y\ ) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\ \mid \eta \mid^2 + 1\ )^{-s} \\ &\quad \times \exp\left(-2\pi i y[\ m_2, \eta\ ] - \frac{2\pi \mid m \mid}{\mid l \mid^2 (\ \mid \eta \mid^2 + 1\ ) y} - \frac{2\pi i[\ l^{-2}, m\eta\ ]}{(\ \mid \eta \mid^2 + 1\ ) y} \right)\ d\eta_1 d\eta_2 \end{aligned}$$

とする。

証明 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ l & h \end{pmatrix}$ とし、まず、$l = 0$ のときを考える。
$\gamma = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ または、$\gamma = \pm \begin{pmatrix} \overline{\omega} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ または、$\gamma = \pm \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}$
のいずれかである。γ がこれらのとき、$\{\pm 1\}$ を同一視することに注意して、

$P_m(\ z,s\ )$ を計算すると、

$$
\begin{aligned}
P_m(\ z,s\ ) &= \sum_{\gamma\ (\ \text{上記}\ )} y^s(\ \gamma(z)\ )\ \exp\ \{\ -2\pi\mid m\mid y(\ \gamma(z)\ )+2\pi i[\ m,x(\ \gamma(z)\ )\ ]\ \} \\
&= y^s\ \exp(\ -2\pi\mid m\mid y+2\pi i[\ m,x\ ]\ ) \\
&\quad +y^s\ \exp(\ -2\pi\mid m\mid y+2\pi i[\ m,\omega x\ ]\ )+y^s\ \exp(\ -2\pi\mid m\mid y+2\pi i[\ m,\overline{\omega}x\ ]) \\
&= y^s\ \exp(\ -2\pi\mid m\mid y)\sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]}\ .
\end{aligned}
$$

次に $l\neq 0$ のときを合わせて考える。

$$
\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ l\neq 0}} = \sum_{\substack{l\neq 0\\ ah-bl=1\\ a,b,l,h\in\mathbf{Z}[\omega]}} = \sum_{\substack{l\neq 0\\ (\ h,(l)\ )=(1)\\ h,l\in\mathbf{Z}[\omega]\\ bl=ah-1}} = \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\ \sum_{\substack{(\ h,(l)\ )=(1)\\ h\in\mathbf{Z}[\omega]\\ ah\equiv 1 \bmod (l)}}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
P_m(\ z,s\ ) &= y^s\ \exp(-2\pi\mid m\mid y)\sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]} \\
&\quad +\frac{1}{2}y^s\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\ \sum_{\substack{(\ h,(l)\ )=(1)\\ h\in\mathbf{Z}[\omega]\\ ah\equiv 1 \bmod (l)}} \left(\mid lx+h\mid^2+\mid ly\mid^2\right)^{-s} \\
&\quad \times\exp\left(-\frac{2\pi\mid m\mid y}{\mid lx+h\mid^2+\mid ly\mid^2}+2\pi i\ \mathrm{Re}\ \left(\frac{\overline{m}a}{l}-\frac{\overline{m(\ lx+h\ )}}{l\{\ \mid lx+h\mid^2+\mid ly\mid^2\ \}}\right)\right)\ .
\end{aligned}
$$

ここで、$h\to h+m_1 l\ (\ m_1\in\mathbf{Z}[\omega]\ )$ として変数変換しても、条件は保たれる。よって、

$$
\begin{aligned}
&P_m(\ z,s\ ) \\
=\ & y^s\ \exp(\ -2\pi\mid m\mid y\ )\sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}}\ \sum_{\substack{h\ \bmod\ (l)\\ (\ h,(l)\ )=(1)\\ m_1\in\mathbf{Z}[\omega]\\ ah\equiv 1\ \bmod\ (l)}} (\ \mid lx+h+m_1 l\mid^2+\mid ly\mid^2\ )^{-s} \\
&\times\exp\left(-\frac{2\pi\mid m\mid y}{\mid lx+h+m_1 l\mid^2+\mid ly\mid^2}+2\pi i\ \mathrm{Re}\ \left(\ \frac{\overline{m}a}{l}-\frac{\overline{m(\ lx+h+m_1 l\ )}}{l\{\ \mid lx+h+m_1 l\mid^2+\mid ly\mid^2\ \}}\ \right)\right)\ .
\end{aligned}
$$

ここで、$f_m(\ x;l,y,s\ )$ を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&f_m(\ x;l,y,s\ ) \\
:=\ & \sum_{m_1\in\mathbf{Z}[\omega]}(\ \mid x+m_1\mid^2+y^2\ )^{-s} \\
&\times\ \exp\left(\frac{1}{\mid l\mid^2(\ \mid x+m_1\mid^2+y^2\ )}\left\{-2\pi\mid m\mid y-2\pi i\ \mathrm{Re}\ \left(\ \frac{\overline{ml(\ x+m_1\ )}}{l}\ \right)\right\}\right)\ .
\end{aligned}
$$

この f_m を用いると、

$$
\begin{aligned}
P_m(z,s) \;\; &= \;\; y^s \ \exp(-2\pi \mid m \mid y) \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[m,\rho x]} \\
&+\frac{1}{2} \sum_{0\neq l\in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{\mid l \mid^{2s}} \sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (h,(l))=(1) \\ ah\equiv 1 \bmod (l)}} e^{2\pi i[m,\frac{a}{l}]} f_m(x+\frac{h}{l};l,y,s)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、以下が成立する。

補題 3.2 $f_m(x;l,y,s)$ は Re $s > \frac{3}{2}$ で絶対収束する。

f_m は周期 $1,\omega$ の関数であるので、$f_m \in C^\infty(\mathbf{C})$ となる。そこで、f_m の Fourier 展開を考える。

$$
f_m(x;l,y,s) = \sum_{m_2\in \mathbf{Z}[\omega]^*} B_m(m_2;l,y,s) \ \exp(2\pi i[m_2,x])
$$

とおき、f_m の Fourier 係数 $B_m(m_2;l,y,s)$ を考える。

$$
\begin{aligned}
B_m(m_2;l,y,s) \;\; &= \;\; \int_{[0,1]\times[0,\omega]} e^{-2\pi i[m_2,\xi]} f_m(\xi;l,y,s)\, d\xi \\
&= \;\; \int_{[0,1]\times[0,\omega]} e^{-2\pi i[m_2,\xi]} \sum_{m_1\in \mathbf{Z}[\omega]} (\mid \xi+m_1 \mid^2 +y^2)^{-s} \\
&\quad \times \ \exp\left(\frac{-2\pi}{\mid l \mid^2 (\mid \xi+m_1 \mid^2 +y^2)} \left\{ \mid m \mid y + i \ \mathrm{Re} \left(\frac{\overline{ml(\xi+m_1)}}{l} \right) \right\} \right) d\xi \ .
\end{aligned}
$$

但し、$m_1', m_2' \in \mathbf{Z}$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\xi \;\; &:= \;\; \xi_1+\xi_2\omega \ , \\
\eta \;\; &:= \;\; \eta_1+\eta_2\omega \ , \\
m_1 \;\; &:= \;\; m_1'+m_2'\omega
\end{aligned}
$$

とする。$\xi \to \eta y - m_1$ (変数変換) すると、

$$
\begin{aligned}
B_m(m_2;l,y,s) \;\; &= \;\; \int_{[\frac{m_1'}{y},\frac{m_1'+1}{y}]\times[\frac{m_2'\omega}{y},\frac{(m_2'+1)\omega}{y}]} e^{-2\pi i[m_2,\eta y-m_1]} \sum_{m_1\in \mathbf{Z}[\omega]} (\mid \eta y \mid^2 +y^2)^{-s} \\
&\quad \times \ \exp\left(\frac{-2\pi}{\mid l \mid^2 (\mid \eta y \mid^2 +y^2)} \left\{ \mid m \mid y + i \ \mathrm{Re} \left(\frac{\overline{ml(\eta y)}}{l} \right) \right\} \right) y^2 \ d\eta_1 d\eta_2 \ .
\end{aligned}
$$

m_1 を決めると、積分の範囲が定まり、m_1', m_2' を決めると、m_1 が定まるので、和と積分の交換が可能である。よって、

$$
\begin{aligned}
= \;\; & \sum_{m_1\in \mathbf{Z}[\omega]} \int_{[\frac{m_1'}{y},\frac{m_1'+1}{y}]\times[\frac{m_2'\omega}{y},\frac{(m_2'+1)\omega}{y}]} y^{2-2s}(\mid \eta \mid^2 +1)^{-s} \\
& \times \exp\left(-2\pi i[m_2,\eta y] + 2\pi i[m_1,m_2] - \frac{2\pi \mid m \mid}{\mid l \mid^2 (\mid \eta \mid^2 +1)y} - \frac{2\pi i[l^{-2},m\eta]}{(\mid \eta \mid^2 +1)y} \right) d\eta_1 d\eta_2 \ .
\end{aligned}
$$

$m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ なので、その性質から $\exp(\ 2\pi i[\ m_1, m_2\ ]\ ) = 1$ となることと、
和と積分によって全平面を渡ることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
f_m(\ x; l, y, s\ ) &= \sum_{m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} \exp(\ 2\pi i[\ m_2, x\ ]\ ) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^{2-2s}(\ |\ \eta\ |^2 + 1\ )^{-s} \\
&\quad \times \exp\left(\ -2\pi i y[\ m_2, \eta\ ] - \frac{2\pi\ |\ m\ |}{|\ l\ |^2\ (\ |\ \eta\ |^2 + 1\ ) y} - \frac{2\pi i[\ l^{-2}, m\eta\ ]}{(\ |\ \eta\ |^2 + 1\ ) y}\right)\ d\eta_1 d\eta_2\ . \\
P_m(\ z, s\ ) &= y^s\ \exp(\ -2\pi\ |\ m\ |\ y\ ) \sum_{\rho = 1, \omega, \overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m, \rho x\ ]} \\
&\quad + \frac{1}{2} y^{2-s} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{|\ l\ |^{2s}} \\
&\quad \times \sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (\ h, (l)\ ) = (1) \\ ah \equiv 1 \bmod (l)}} e^{2\pi i[\ m, \frac{a}{l}\ ]} \sum_{m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ m_2, x + \frac{h}{l}\ ]} A_s(\ m, m_2; l; y\ )\ . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

このとき、式 (1) において、以下が成り立つ。

補題 3.3 式 (1) において、和の順序は交換可能である。

また、Kloosterman 和について、以下が成り立つ。

補題 3.4 $m, m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*, l \in \mathbf{Z}[\omega]$ のとき、

$$
S(\ m_2, m; l\ ) = S(\ m, m_2; l\ )\ .
$$

補題 3.3 と補題 3.4 により、

$$
\begin{aligned}
P_m(\ z, s\ ) &= y^s\ \exp(\ -2\pi\ |\ m\ |\ y\ ) \sum_{\rho = 1, \omega, \overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m, \rho x\ ]} \\
&\quad + \frac{1}{2} y^{2-s} \sum_{m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ m_2, x\ ]} \\
&\quad \times \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{|\ l\ |^{2s}} \sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (\ h, (l)\ ) = (1) \\ ha \equiv 1 \bmod (l)}} e^{2\pi i[\ m_2, \frac{h}{l}\ ]} e^{2\pi i[\ m, \frac{a}{l}\ ]} A_s(\ m, m_2; l; y\ ) \\
&= y^s\ \exp(\ -2\pi\ |\ m\ |\ y\ ) \sum_{\rho = 1, \omega, \overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m, \rho x\ ]} \\
&\quad + \frac{1}{2} y^{2-s} \sum_{m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ m_2, x\ ]} \\
&\quad \times \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{|\ l\ |^{2s}} S(\ m, m_2; l\ ) A_s(\ m, m_2; l; y\ )\ .
\end{aligned}
$$

よって、命題 3.1 が示された。

補題 3.2 を示す。

証明

$$| f_m | \quad = \quad \sum_{m_1 \in \mathbf{Z}[\omega]} (| x + m_1 |^2 + y^2)^{-\mathrm{Re}\ s} \underbrace{\left| \exp \left(\frac{-2\pi | m | y}{| l |^2 (| x + m_1 |^2 + y^2)} \right) \right|}$$

$$\times \underbrace{\left| \exp \left(\frac{-2\pi i \ \mathrm{Re} \left(\frac{\overline{ml(x + m_1)}}{l} \right)}{| l |^2 (| x + m_1 |^2 + y^2)} \right) \right|} .$$

≤ 1 であり、 $= 1$ だから、

$$\begin{aligned} | f_m | \quad & \ll \quad \sum_{m_1 \in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{| m_1 |^{2\,\mathrm{Re}\ s}} \\ & \leq \quad \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{a^2 + b^2 - ab = p \\ a, b \in \mathbf{Z}[\omega]}} \frac{4\sqrt{p}}{(a^2 + b^2 - ab)^{\mathrm{Re}\ s}} \\ & \leq \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\mathrm{Re}\ s - \frac{1}{2}}} . \end{aligned}$$

$\mathrm{Re}\ s > \frac{3}{2}$ のとき、

$$| f_m | \quad < \quad \infty .$$

よって、補題 3.2 が示された。

次に、補題 3.4 を示す。

証明　左辺の和と右辺の和の取り方が等しいことを示す。

$$\sum_{\substack{h \ mod \ (l) \\ (h, (l)) = (1) \\ ha \equiv 1 \bmod (l)}} \quad = \quad \sum_{\substack{h \ mod \ (l) \\ (h, (l)) = (1) \\ a' \bmod (l) \\ ha' \equiv 1 \bmod (l)}} .$$

但し、$a' := da"$、$l := dl"$ かつ $(a", l") = 1$ とし、$l', l_1 \in \mathbf{Z}[\omega]$ とおく。このとき $ha' \equiv 1 \bmod (l)$ より、

$$ha' = hda" = l_1 l + 1 = dl_1 l" + 1$$

となるから、

$$d(ha" - l_1 l") = 1 .$$

よって、$d = 1$ かつ $ha" \equiv ha' \equiv l_1 l" \equiv 1 \bmod (l)$ であるから、$(a', (l)) = (1)$ が成り立つ。ゆえに、

$$\sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (h, (l)) = (1) \\ a' \bmod (l) \\ ha' \equiv 1 \bmod (l)}} \quad = \quad \sum_{\substack{a' \bmod (l) \\ (a', (l)) = (1) \\ ha' \equiv 1 \bmod (l) \\ h \bmod (l) \\ (h, (l)) = (1)}} \quad = \quad \sum_{\substack{a' \ mod \ (l) \\ (a', (l)) = (1) \\ a'h \equiv 1 \bmod (l)}} .$$

$m, m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*, l, l_1, l' \in \mathbf{Z}[\omega]$ に注意してまとめると、

$$\begin{aligned} S(\ m_2, m; l\ ) &= \sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (\ h,(l)\ )=(1) \\ ha\equiv 1 \bmod (l)}} e\left(\ [\ m_2, \frac{h}{l}\ ]\ \right) e\left(\ [\ m, \frac{a}{l}\ ]\ \right) \\ &= \sum_{\substack{a' \bmod (l) \\ (\ a',(l)\ )=(1) \\ a'h\equiv 1 \bmod (l)}} e\left(\ [\ m_2, \frac{h}{l}\ ]\ \right) e\left(\ [\ m, \frac{a'+ll'}{l}\ ]\ \right) \\ &= \sum_{\substack{a' \bmod (l) \\ (\ a',(l)\ )=(1) \\ a'h\equiv 1 \bmod (l)}} e\left(\ [\ m, \frac{a'}{l}\ ]\ \right) e\left(\ [\ m_2, \frac{h}{l}\ ]\ \right) = S(\ m, m_2; l\ )\ . \end{aligned}$$

よって、補題 3.4 が示された。

補題 3.3 を示す準備をする。

補題 3.5 $m, m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*, l \in \mathbf{Z}[\omega]$ とし、Re $s > 1$ を満たす $s \in \mathbf{C}$ とする。

$$A_s(\ m, m_2; l; y\ ) \ll \exp(\ -2\pi \mid m_2 \mid y\ )\ .$$

証明

$$\begin{aligned} A_s(\ m, m_2; l; y\ ) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\ \mid\eta\mid^2 +1\ )^{-s} \exp(\ -2\pi i y[\ m_2, \eta\ ]) \\ &\quad \times \exp\left(\ -\frac{2\pi \mid m\mid}{\mid l\mid^2 (\ \mid\eta\mid^2+1\ )y}\right) \exp\left(\ -\frac{2\pi i[\ l^{-2}, m\eta\ ]}{(\ \mid\eta\mid^2+1\ )y}\right)\ d\eta_1 d\eta_2 \end{aligned}$$

のうち、$\exp\left(-\frac{2\pi|m|}{|l|^2(\ |\eta|^2+1\ )y}\right) \leq 1$ なので無視する。次に

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\ \mid\eta\mid^2 +1\ )^{-s}\ d\eta_1 d\eta_2\right|$$

を考える。極座標表示

$$\begin{aligned} \eta &:= re^{i\theta} = \eta_1 + \eta_2 i\ , \\ \eta_1 &= r\cos\theta\ , \\ \eta_2 &= r\sin\theta \end{aligned}$$

を用いて、評価すると、

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\ \mid\eta\mid^2 +1\ )^{-s}\ d\eta_1 d\eta_2\right| &\leq \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{r}{(\ r^2+1\ )^{\mathrm{Re}\ s}}\ drd\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{2(\ 1-\mathrm{Re}\ s\ )}(\ r^2+1\ )^{1-\mathrm{Re}\ s}\right]_0^{\infty}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

$1-\mathrm{Re}\ s<0$ のとき、つまり $\mathrm{Re}\ s>1$ のとき、

$$(\text{式 } (2)) = \frac{\pi}{\mathrm{Re}\ s-1}\ .$$

次に、

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\ -2\pi i y[\ m_2,\eta\ ]\right)\ d\eta_1 d\eta_2 \right|$$

を考える。$m'_2, m''_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R}$ とする。

$$\begin{aligned} m_2 &= m'_2 + m''_2 i\ , \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2 i \end{aligned}$$

とおく。$[\ m_2,\eta\ ] = m'_2\eta_1 + m''_2\eta_2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\ -2\pi i y[\ m_2,\eta\ ]\right)\ d\eta_1 d\eta_2 \right| &\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-2\pi i y m'_2\eta_1 - 2\pi i y m''_2\eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{2\pi y m'_2(\ -i\eta_1\ ) + 2\pi y m''_2(\ -i\eta_2\ )} \right| d\eta_1 d\eta_2\ . \end{aligned} \tag{3}$$

このとき、

η_1	$-\infty \to \infty$
$-i\eta_1$	$+i\infty \to -\infty$

なので、$-i\eta_1, -i\eta_2$ に注目する。Cauchy の積分定理より、

$$\downarrow_{-i\infty}^{+i\infty} - \downarrow_{\delta_1-i\infty}^{\delta_1+i\infty} = 0$$

だから、

$-i\eta_1$	$\delta_1 + i\infty \to \delta_1 - i\infty$
η_1	$-\infty + i\delta_1 \to \infty + i\delta_1$

とおく。このとき、$0<\mid \delta_1 \mid<1$ とする。よって、η_1 を $\mathrm{Im}\ \eta_1 = \delta_1$ のとき、$\mathrm{Re}\ \eta_1$ で $-\infty \to \infty$ まで積分したのものとなる。ここで、δ_1 の範囲は、後の符号調節のために、$+$ と $-$ を含むようにとる。また、$0<\mid \delta_2 \mid<1$ とする。よって、η_2 も同様に、$\mathrm{Im}\ \eta_2 = \delta_2$ のとき、$\mathrm{Re}\ \eta_2$ で $-\infty \to \infty$ まで積分したのものとなる。まとめると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\ d\eta_1 &= \int_{\mathrm{Im}\ \eta_1=\delta_1} \cdots\ d\eta_1\ , \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\ d\eta_2 &= \int_{\mathrm{Im}\ \eta_2=\delta_2} \cdots\ d\eta_2 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} (3) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{2\pi y m'_2(\ -i\eta_1\ )} \right| \left| e^{2\pi y m''_2\eta_2(\ -i\eta_2\ )} \right| d\eta_1 d\eta_2 \\ &= \int_{\mathrm{Im}\ \eta_2=\delta_2} e^{2\pi y m''_2\delta_2} \int_{\mathrm{Im}\ \eta_1=\delta_1} e^{2\pi y m'_2\delta_1}\ d\eta_1 d\eta_2\ . \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、δ_1 を $m'_2\delta_1 \leq 0$ となるように各 m'_2 に対して、δ_1 を定める。同様に、δ_2 を $m"_2\delta_2 \leq 0$ となるように各 $m"_2$ に対して、δ_2 を定める。そこで、$\mid \delta_1 \mid \to 1, \mid \delta_2 \mid \to 1$ とすると、

$$\begin{aligned}
(\text{式 }(4)) &= \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_2=\delta_2} e^{-2\pi y|m"_2\delta_2|} \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_1=\delta_1} e^{-2\pi y|m'_2\delta_1|}\ d\eta_1 d\eta_2 \\
&= e^{-2\pi y(\ |m"_2|+|m'_2|\ )} \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_2=\{\ 1\ or\ -1\ \}} \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_1=\{\ 1\ or\ -1\ \}} d\eta_1 d\eta_2
\end{aligned} \tag{5}$$

となる。さらに、Cauchy の積分定理より、

$$(\text{式 }(5)) = e^{-2\pi y(\ |m'_2|+|m"_2|\ )} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 \tag{6}$$

となる。ここで、$\mid m'_2 \mid + \mid m"_2 \mid > \mid m'_2 + m"_2 i \mid = \mid m_2 \mid$ (三角不等式) を用いると、

$$(\text{式 }(6)) = e^{-2\pi y(\ |m'_2|+|m"_2|\ )}\ <\ e^{-2\pi|m_2|y}$$

となる。次に、

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i[\ l^{-2}, m\eta\ ]}{(\ |\eta|^2+1\ )y}}\ d\eta_1 d\eta_2 \right|$$

を考える。

$$\begin{aligned}
l_1 &:= l_1 + l_2 i\ , \\
m &:= m' + m"i\ , \\
\eta &:= \eta_1 + \eta_2 i
\end{aligned}$$

とおく。このとき、

$$[\ l^{-2}, m\eta\ ] = \frac{1}{\mid l \mid^4}\{ \underbrace{[\ (\ l_1^2 - l_2^2\ )m' - 2m"l_1 l_2\ ]}\eta_1 - \underbrace{[\ (\ l_1^2 - l_2^2\ )m" + 2m'l_1 l_2\ ]}\eta_2\}\ .$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i[\ l^{-2}, m\eta\ ]}{(\ |\eta|+1\ )y}}\ d\eta_1 d\eta_2 \right| \\
\leq\ & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{\frac{2\pi \qquad (\ -i\eta_1\ )}{|l|^4(\ |\eta|^2+1\ )y}} \right| \left| e^{-\frac{2\pi \qquad (\ -i\eta_2\ )}{|l|^4(\ |\eta|^2+1\ )y}} \right| d\eta_1 d\eta_2
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。前述と同様に評価する。δ_1 と δ_2 を新たに取り直すと、

$$(\text{式 }(7)) = \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_2=\delta_2} e^{-\frac{2\pi \qquad \delta_2}{|l|^4(\ |\eta|^2+1\ )y}} \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_1=\delta_1} e^{\frac{2\pi \qquad \delta_1}{|l|^4(\ |\eta|^2+1\ )y}}\ d\eta_1 d\eta_2 \tag{8}$$

となる。　$\delta_1 \leq 0$ となるように、δ_1 を決める。また、　$\delta_2 \geq 0$ となるように、δ_2 を決める。すると、

$$(\text{式 }(8)) = \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_2=\delta_2} e^{-\frac{2\pi| \qquad \delta_2|}{|l|^4(\ |\eta|^2+1\ )y}} \int_{\mathrm{Im}\ \ \eta_1=\delta_1} e^{-\frac{2\pi| \qquad \delta_1|}{|l|^4(\ |\eta|^2+1\ )y}}\ d\eta_1 d\eta_2 \tag{9}$$

となる。ここで、$|\delta_1| \to 1, |\delta_2| \to 1$ とすると、

$$(\text{式 }(9)) = \int_{\mathrm{Im}\ \eta_2 = \{\ 1\ or\ -1\ \}} \int_{\mathrm{Im}\ \eta_1 = \{\ 1\ or\ -1\ \}} e^{\underbrace{-\frac{2\pi(\ |\quad| + |\quad|\ )}{|\ l\ |^4\ (\ |\ \eta\ |^2 + 1\ )y}}} d\eta_1 d\eta_2 \tag{10}$$

なる。Cauchy の積分定理と $\quad \leq 0$ より、

$$(\text{式 }(10)) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \quad d\eta_1 d\eta_2\ .$$

すべてを合わせると、

$$\left| A_s(\ m, m_2; l; y\ ) \right| < \frac{\pi}{\mathrm{Re}\ \ s - 1} e^{-2\pi |m_2| y}$$

となる。よって、

$$A_s(\ m, m_2; l; y\ ) \ll e^{-2\pi |m_2| y}\ .$$

但し、Re $s > 1$ であり、無視できる定数倍の部分は、m, m_2, l, y に依らない。
よって、補題 3.5 が示された。

補題 3.3 を示す。

証明　後は、

$$\frac{1}{2} y^{2-s} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{|\ l\ |^{2s}} \sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (\ h, (l)\ ) = (1) \\ ah \equiv 1 \bmod (l)}} e^{2\pi i [\ m, \frac{a}{l}\ ]} \sum_{m_2 \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i [\ m_2, x + \frac{h}{l}\ ]} A_s(\ m, m_2; l; y\ )$$

か、和の順序交換をして変形した式

$$\frac{1}{2} y^{2-s} \sum_{m_2 \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i [\ m_2, x\ ]} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{|\ l\ |^{2s}} S(\ m, m_2; l\ ) A_s(\ m, m_2; l; y\ ) \tag{11}$$

の絶対収束を示せばよい。後者を示す。

補題 3.6 [Sarnak, p.268 (3.9)]

$$S(\ m, m_2; l\ ) \ll |\ l\ || \ (\ m, m_2, l\ )\ | \sigma_0(l)\ .$$

補題 3.7 [三井, p.23、定理 1.6.4][長谷川, p.71、定理２]
$\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$$\sigma_0(l) = O(N(l)^{\varepsilon})\ .$$

また、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ のとき、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$$\sigma_0'(n) = O(|\ n\ |^{\varepsilon})\ .$$

補題 3.5、補題 3.6 と補題 3.7 を用いる。z と m を固定する。

$$\begin{aligned}
\mid (\text{式 } (11)) \mid &\leq \frac{1}{2}y^{2-\mathrm{Re}\ s}\sum_{m_2\in\mathbf{Z}[\omega]^*}\frac{\mid e^{2\pi i[\ m_2,x\ ]}\mid}{e^{2\pi|m_2|y}}\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\mid l\mid^{-2\,\mathrm{Re}\ s}\left|S(\ m,m_2;l\ )\right| \\
&\ll \underbrace{\sum_{m_2\in\mathbf{Z}[\omega]^*}\frac{\mid m_2\mid}{e^{|m_2|y}}}\underbrace{\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\mid l\mid^{1-2\,\mathrm{Re}\ s}\sigma_0(l)}\ . \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mid m_2\mid}{e^{|m_2|y}}\ dm_2'dm"_2\ . \qquad (12)
\end{aligned}$$

$\mid m_2\mid = re^{i\theta}$ とすると、

$$\begin{aligned}
(\text{式 } (12)) &= \int_0^{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r^2}{e^{-ry}}\ dr}\,d\theta\ , \qquad (13) \\
&= \left[r^2\left(-\frac{1}{y}e^{-ry}\right)\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}2r\left(-\frac{1}{y}e^{-ry}\right)\ dr \\
&= \frac{2}{y}\int_0^{\infty}re^{-ry}\ dr \\
&= \frac{2}{y}\left\{\left[r\left(-\frac{1}{y}e^{-ry}\right)\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-\frac{1}{y}e^{-ry}\ dr\right\} \\
&= \frac{2}{y^2}\int_0^{\infty}e^{-ry}\ dr \\
&= \frac{2}{y^2}\left[-\frac{1}{y}e^{-ry}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{2}{y^3}\ .
\end{aligned}$$

よって、

$$(\text{式 } (13)) = \frac{4\pi}{y^3}\ <\ \infty$$

となる。

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\mid l\mid^{1-2\,\mathrm{Re}\ s+2\varepsilon} \\
&\leq 6+\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}r^{2+2\varepsilon-2\,\mathrm{Re}\ s}\ drd\theta \\
&\ll 2\pi\int_1^{\infty}r^{2-2\,\mathrm{Re}\ s+2\varepsilon}\ dr \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{3-2\,\mathrm{Re}\ s+2\varepsilon}r^{3-2\,\mathrm{Re}\ s+2\varepsilon}\right]_1^{\infty}
\end{aligned}$$

となり、$3-2\,\mathrm{Re}\ s+2\varepsilon<0$ つまり、$\mathrm{Re}\ s>\frac{3}{2}+\varepsilon$ のとき、

$$\ll\ \frac{2\pi}{2\,\mathrm{Re}\ s-3-2\varepsilon}\ <\ \infty$$

であるから、$\forall\varepsilon > 0$ より、$\varepsilon \to 0$ とすると、Re $s > \frac{3}{2}$ で式 (11) は絶対収束する。よって、補題 3.3 は示された。

3.2 Poincaré 級数や Eisenstein 級数の性質

補題 3.8 $P_m(\ z, s\ )$ は Re $s > \frac{3}{2}$ で絶対収束し、存在する。

証明 補題 3.3 の証明において、

$$\begin{aligned} P_m(\ z,s\ ) &= y^s \ \exp(\ -2\pi \mid m \mid y\ ) \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]} \\ &\quad + \frac{1}{2} y^{2-s} \sum_{m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ m_2, x\ ]} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{\mid l \mid^{2s}} S(\ m, m_2; l\ ) A_s(\ m, m_2; l; y\ )\ . \end{aligned}$$

$P_m(\ z,s\ )$ の右辺の第 2 項目が Re $s > \frac{3}{2}$ で絶対収束していることがわかっている。第 1 項目については、z, m を固定すると、y が 0 の近くや ∞ の近くであっても、

$$\Big| y^s e^{-2\pi|m|y} \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]} \Big| \leq 3 \frac{y^{\mathrm{Re}\ s}}{e^{2\pi|m|y}} \ < \ \infty$$

となる。よって、補題 3.8 は示された。

補題 3.9 [Sarnak, p.257-p.259]
$E(\ z,s\ )$ は、Re $s > 2$ で絶対収束する。

補題 3.10 Re $s > 2$ のとき、

$$\Big| P_m(\ z,s\ ) \Big| \leq 3E(\ z, \mathrm{Re}\ s)\ .$$

証明

$$\begin{aligned} \Big| P_m(\ z,s\ ) \Big| &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} \Big| y^s(\ \gamma(z)\ ) \Big| \Big| e^{-2\pi|m|y(\ \gamma(z)\ ) + 2\pi i[\ m, x(\ \gamma(z)\ )\ ]} \Big| \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^{\mathrm{Re}\ s}(\ \gamma(z)\ ) \\ &= 3 \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^{\mathrm{Re}\ s}(\ \gamma(z)\ )\ . \end{aligned}$$

補題 3.9 より、Re $s > 2$ で考える。よって、補題 3.10 は示された。

補題 3.11

$$E(\ z,s\ ) = \frac{1}{6} \sum_{\substack{l,h \in \mathbf{Z}[\omega] \\ (\ l,h\ ) = (1)}} \frac{y^s}{(\ \mid lx + h \mid^2 + \mid ly \mid^2\ )^s}\ .$$

証明 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ l & h \end{pmatrix} \in \Gamma$ とおき、Γ_∞ の性質を示した補題 2.14 に注意すると、

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s(\ \gamma(z)\ ) = \frac{1}{6} \sum_{\substack{l,h \in \mathbf{Z}[\omega] \\ (\ l,h\ )=(1)}} \frac{y^s}{(\ |\ lx+h\ |^2 + |\ ly\ |^2\ )^s}\ .$$

よって、補題 3.11 が示された。

補題 3.12

$$E(\ z,s\ ) = \frac{1}{3} P_0(\ z,s\ )\ .$$

証明

$$\begin{aligned} P_0(\ z,s\ ) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^s(\ \gamma(z)\ ) e^{-2\pi|0|y(\ \gamma(z)\ )+2\pi i[\ 0,x(\ \gamma(z)\ )\ ]} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^s(\ \gamma(z)\ )\ . \end{aligned} \tag{14}$$

補題 2.14 より、

$$(\text{式 } (14)) = 3 \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s(\ \gamma(z)\ ) = 3E(\ z,s\ )\ .$$

よって、補題 3.12 が示された。

補題 3.13 $P_m(\ z,s\ )$ は $SL(\ 2,\mathbf{Z}[\omega]\ )-$ 不変である。

証明 $\Gamma \ni \forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ l & h \end{pmatrix}$ とし、$\Gamma_t \ni \forall\gamma_t = \pm \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $b_1 \in \mathbf{Z}[\omega]$ とおくと、

$$\begin{aligned} \gamma_t(\ \gamma(z)\ ) &= \gamma(z) + b\ , \\ x(\ \gamma(z)\ ) &= x(\ \gamma(\ \gamma(z)\ )\ )\ , \\ y(\ \gamma(z)\ ) &= y(\ \gamma_t(\ \gamma(z)\ )\ ) \end{aligned}$$

であり、$m \in \mathbf{Z}[\omega]^*, b \in \mathbf{Z}[\omega]$ より、$[\ m,b\ ] \in \mathbf{Z}$ となることから、

$$e^{2\pi i(\ [\ m,\gamma(z)\ ]+[\ m,b\ ]\ )} = e^{2\pi i[\ m,\gamma(z)\ ]}$$

となる。これらから、$\gamma \to \gamma_t\gamma$ で $P_m(\ z,s\ )-$ 不変となる。よって、$\Gamma_t\backslash\Gamma$ のどの代表系をとってもよい。$\forall\gamma' \in \Gamma$ に対して、

$$P_m(\ \gamma'(z),s\ ) = \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^s\left(\ \gamma\left(\ \gamma'(z)\ \right)\ \right) e^{-2\pi|m|y\left(\ \gamma\left(\ \gamma'(z)\ \right)\ \right)+2\pi i[\ m,x\left(\ \gamma\left(\ \gamma'(z)\ \right)\ \right)\ ]} \tag{15}$$

となるが、$\Gamma_t \gamma\gamma'$ から代表系をとってもいいので、$\gamma" := \gamma\gamma'$ とおくと、

$$\begin{aligned}(\text{式 }(15)) &= \sum_{\gamma"\in\Gamma_t\backslash\Gamma} y^s(\ \gamma"(z)\ )e^{-2\pi|m|y(\ \gamma"(z)\ )+2\pi i[\ m,x(\ \gamma"(z)\ )\ ]} \\ &= P_m(\ z,s\ )\ .\end{aligned}$$

よって、補題 3.13 が示された。

補題 3.14 $E(\ z,s\ )$ は $SL(\ 2,\mathbf{Z}[\omega]\ )-$ 不変である。

証明 補題 3.13 と同様に計算し、代表系を取り直せばよい。よって、補題 3.14 が示された。

3.3 Eisenstein 級数の変形

まず、変形の準備をする。

補題 3.15 Re $s>1$ に対して、

$$A_s(\ 0,n;l;y\ ) = \begin{cases} \frac{\pi}{s-1} & n=0 \text{ のとき },\\ \frac{2\pi^s|ny|^{s-1}K_{s-1}(\ 2\pi|n|y\ )}{\Gamma(s)} & n\neq 0 \text{ のとき }.\end{cases}$$

証明 $n\neq 0$ のときを考える。

$$A_s(\ 0,n;l;y\ ) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\ |\ \eta\ |^2+1\ )^s}\ \exp(\ -2\pi iy[\ n,\eta\ ]\ )\ d\eta_1 d\eta_2\ .$$

$\eta := re^{i\theta}$ と変数変換し、$n := n_1+n_2 i\in\mathbf{Z}[\omega]$ とおくと、

$$\begin{aligned}A_s(\ 0,n;l;y\ ) &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r}{(\ r^2+1\ )^s}e^{-2\pi iy[\ n,r(\ \cos\theta+i\sin\theta\ )\ ]}\ d\theta dr \\ &= \int_0^{\infty}\frac{r}{(\ r^2+1\ )^s}\int_0^{2\pi}\underbrace{e^{i(\ -2\pi yn_1 r\cos\theta-2\pi yn_2\sin\theta\ )}}\ d\theta dr\ .\end{aligned} \tag{16}$$

について考える。

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\left(\ -2\pi y|n|r\left\{\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\cos\theta+\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\sin\theta\right\}\ \right)}\ d\theta \tag{17}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\cos\theta_1 &:= \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\ ,\\ \sin\theta_1 &:= \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\end{aligned}$$

とおくと、

$$(\text{式 }(17)) = \int_0^{2\pi} e^{i(\ -2\pi y|n|r\cos(\ \theta-\theta_1\ )\ )}\,d\theta\ . \tag{18}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta_2 := \theta-\theta_1$ と変数変換すると、

θ	$0 \to 2\pi$
θ_2	$\frac{\pi}{2}+\theta_1 \to -\frac{3}{2}\pi+\theta_1$

となる。よって、

$$\begin{aligned}(\text{式 }(18)) &= \int_{\frac{\pi}{2}+\theta_1}^{-\frac{3}{2}\pi+\theta_1} e^{i(\ -2\pi y|n|r\cos\left(\ \frac{\pi}{2}-\theta_2\ \right)\ )}\,(-d\theta_2) \\ &= \int_{-\frac{3}{2}\pi+\theta_1}^{\frac{\pi}{2}+\theta_1} e^{i(\ -2\pi y|n|r\sin\theta_2\ )}\,d\theta_2\ . \end{aligned} \tag{19}$$

$\alpha := -\frac{3}{2}\pi+\theta_1$ とすると、

$$(\text{式 }(19)) = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{i(\ 0\cdot\theta-2\pi y|n|r\sin\theta_2\ )}\,d\theta_2\ . \tag{20}$$

ここで、

補題 3.16 [数学公式 , p.178]
$0 \le n \in \mathbf{Z}$ のとき、

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{i(\ n\theta-z\sin\theta\ )}\,d\theta\ .$$

補題 3.16 を用いると、

$$(\text{式 }(20)) = 2\pi J_0(\ 2\pi y\mid n\mid r\ )$$

となり、式 (16) に式 (20) を代入すると、

$$(\text{式 }(16)) = \int_0^{\infty} \frac{2\pi r J_0(\ 2\pi y\mid n\mid r\ )}{(\ r^2+1\ )^s}\,dr \tag{21}$$

となる。ここで、Bessel 関数について、以下の式が成立する。

補題 3.17 [Erdélyi etc., p.96 (59)]
$2\,\mathrm{Re}\ \mu+\frac{3}{2} > \mathrm{Re}\ \nu > -1$ のとき、

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1}J_\nu(\ ax\ )}{(\ x^2+y^2\ )^{\mu+1}}\,dx = \frac{a^\mu y^{\nu-\mu}K_{\nu-\mu}(\ ay\ )}{2^\mu\Gamma(\ \mu+1\ )}\ .$$

補題 3.18 [Erdélyi etc., p.5 (14)]

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)\ .$$

補題 3.17 と補題 3.18 を用いる。$\nu = 0$、$\mu{+}1 = s$、$x = r$、$y = 1$、$a = 2\pi y \mid n \mid$ とおくと、Re $s > 1$ より、

$$2\,\mathrm{Re}\ \mu + \frac{3}{2}\ >\ \frac{3}{2}\ >\ \mathrm{Re}\ \nu = 0\ >\ -1$$

となり、補題 3.17 の条件は満たされる。よって、補題 3.18 に注意すると、

$$(\text{式 } (21)) = \frac{2\pi^s (\ y \mid n \mid\ )^{s-1} K_{s-1}(\ 2\pi \mid n \mid y\ )}{\Gamma(s)}$$

となる。
次に、$n = 0$ のときを考える。

$$A_s(\ 0, 0; l; y\ ) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\ \mid \eta \mid^2 +1\ )^s}\ d\eta_1 d\eta_2\ . \tag{22}$$

補題 3.5 の証明で用いた式から、

$$(\text{式 } (22)) = \frac{\pi}{s-1}\ .$$

よって、補題 3.15 が示された。

ここで、$\mathbf{Z}[\omega]$ について、まず確認する。

補題 3.19 $\mathbf{Z}[\omega]$ は単項イデアル整域である。

これはよく知られた事実である。

補題 3.20 $\mathbf{Z}[\omega]$ の単元群は、$\{\pm 1, \pm\omega, \pm\overline{\omega}\}$ である。

証明 $ab = 1$ を満たす $a, b \in \mathbf{Z}[\omega]$ の組は、

$$(\ a, b\ ) = (\ \pm 1, \mp 1\ ) = (\ \pm\omega, \mp\overline{\omega}\ ) = (\ \pm\overline{\omega}, \mp\omega\ )\ .$$

よって、補題 3.20 が示された。

補題 3.21 $\mathbf{Z}[\omega]$ の元をイデアルで考えると、同一視できるイデアルは 6 個である。

証明 $\mathbf{Z}[\omega]$ の単元群の位数は 6 である。よって、補題 3.21 が示された。

次に、イデアルについて確認する。

定義 3.22 [高木, p.306]
M をイデアル、α と β を $\mathbf{Z}[\omega]$ とする。
　$\alpha \equiv \beta \bmod M$ であることと、$\alpha - \beta$ が M で割り切れる（含まれる）ことは同値である。

イデアル A と B の公約イデアルであることと、イデアル A と B を共に割り切る（含む）イデアルであることは同値である。

$(\ A, B\ ) = (1)$ であることと、イデアル A と B の最大公約イデアルがイデアル (1) であることは同値である。

関数が乗法的であるということを定義する。

定義 3.23 $f\colon \mathbf{Z}[\omega] \to \mathbf{C}$ とし、A と B をイデアルとする。
f が乗法的であることは、

$$\begin{cases} (\quad) & f(\ (1)\ ) = 1\ , \\ \text{かつ} & \\ (\quad) & f(\ AB\ ) = f(A)f(B) \quad (\ A, B\ ) = (1) \text{ のとき} \end{cases}$$

を満たすことと同値である。

これらの言葉を用いると、以下の命題 3.24 が成立する。

命題 3.24 $f\colon \mathbf{Z}[\omega] \to \mathbf{C}$ は、乗法的であり、

$$f\ (\ (n)\ ) = O(\ |\ n\ |^{\alpha}\ )$$

を満たすとする。$N\ (\ (n)\ )$ を (n) のノルムとし、$0 < \forall\varepsilon$ とする。このとき、$\mathrm{Re}\ s\ >\ \frac{\alpha}{2} + 1 + \varepsilon$ であるような、$s \in \mathbf{C}$ に対して、(p) が (n) の異なる素イデアルをわたるとすると、

$$(1) \qquad \sum_{(0)\neq(n)\ \subset\ \mathbf{Z}[\omega]} \frac{f\ (\ (n)\ )}{N\ (\ (n)\ )^{s}} \text{ は広義一様絶対収束する。}$$

$$(2) \qquad \sum_{(0)\neq(n)\ \subset\ \mathbf{Z}[\omega]} \frac{f\ (\ (n)\ )}{N\ (\ (n)\ )^{s}} = \prod_{(p)} \left(\sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{f\ (\ (p)^{\delta}\ )}{N\ (\ (p)^{\delta}\ )^{s}} \right)$$

が成立し、(2) の右辺の無限積も広義一様絶対収束する。

証明 (1) について考える。

補題 3.25 [高木, p.282-283]

$$\begin{aligned} N(\ AB\ ) &= N(A)N(B)\ ,\ (\ A, B\ :\ ideal\ )\ . \\ N(\ (n)\ ) &= |\ n\ |^{2}\ . \end{aligned}$$

補題 3.25 を用いる。M を $0 < M \in \mathbf{R}$ を満たす定数とする。

$$\left| \frac{f\ (\ (n)\ )}{N\ (\ (n)\ )^{s}} \right| \ \leq\ M \frac{|\ n\ |^{\alpha}}{|\ n\ |^{2\ \mathrm{Re}\ s}} = M\ |\ n\ |^{\alpha - 2\ \mathrm{Re}\ s}\ .$$

$\alpha - 2\,\mathrm{Re}\ s < -2-2\varepsilon$ より、

$$\begin{aligned}
\sum_{(0)\neq(n)\ \subset\ \mathbf{Z}[\omega]} \left| \frac{f(\ (n)\ )}{N(\ (n)\ )^s} \right| &\leq M \sum_{(0)\neq(n)\ \subset\ \mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{|\ n\ |^{-2-2\varepsilon}} \\
&\leq 6 + \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} r^{-2-2\varepsilon} \cdot r\ drd\theta \\
&= 6 + 2\pi \left[\frac{1}{-2\varepsilon} r^{-2\varepsilon} \right]_1^{\infty} < \infty\ .
\end{aligned}$$

次に、(2) を考える。

$$\begin{aligned}
F(s) &:= \sum_{(0)\neq(n)\ \subset\ \mathbf{Z}[\omega]} \frac{f(\ (n)\ )}{N(\ (n)\ )^s}\ , \\
G_p(s) &:= \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{f\left(\ (p)^{\delta}\ \right)}{N\left(\ (p)^{\delta}\ \right)^s}
\end{aligned}$$

とおく。すると、$G_p(s)$ は $F(s)$ の部分和なので、(1) より、広義一様絶対収束する。$(N) \subset \mathbf{Z}[\omega]$ とする。また、 $1 \leq r \in \mathbf{Z}$ とし、$(N) = (P_1)^{a_1} \cdots (P_r)^{a_r}$ とする。補題 3.25 より、

$$\prod_{(p)\supseteq(N)} G_p(s) = \sum_{a_1,\cdots,a_r=0}^{\infty} \frac{f(\ (P_1)^{a_1} \cdots (P_r)^{a_r}\ )}{N(\ (\ P_1\ )^{a_1} \cdots (\ P_r\ )^{a_r}\ )^s}\ .$$

$r < k \in \mathbf{Z}$ とする。

$$F(s) - \prod_{(p)\supseteq(N)} G_p(s) = \sum_{\substack{0\neq(n)\subset\mathbf{Z}[\omega] \\ (P_k)\supset(n)}} \frac{f(\ (n)\ )}{N(\ (n)\ )^s}\ . \tag{23}$$

ここで、$N \to \infty$ とすると、$(p) \supseteq (N)$ となる素イデアルはすべての素イデアルになるので、(式 (23)) $= 0$ となる。よって、

$$F(s) = \prod_{(p)} G_p(s)\ .$$

後は、無限積が広義一様絶対収束であることを示せばよい。$H_p(s) := 1 - G_p(s)$ とおく。

補題 3.26 [田村, p.139 補助定理１．]

$\displaystyle\prod_{(p)} G_p(s)$ が広義一様絶対収束することと、$\displaystyle\sum_{(p)\subset\mathbf{Z}[\omega]} H_p(s)$ が広義一様絶対収束することは同値である。

補題 3.26 を用いると、(1) と同様に、

$$\sum_{(p)\subset\mathbf{Z}[\omega]} \left| H_p(s) \right| \leq \sum_{(0)\neq(n)\in\mathbf{Z}[\omega]} \left| \frac{f(\ (n)\ )}{N(\ (n)\ )^s} \right| < \infty$$

となる。よって、命題 3.24 が示された。

次に、Φ を定義し、Φ について考える。

定義 3.27 M をイデアルとする。このとき、

$$\Phi(M) := \sharp\left(\mathbf{Z}[\omega]/M \right)^{\times}$$

と定義する。

補題 3.28 [高木, p.307-309]
A、B と M をイデアルとし、P を M の異なる素イデアルをわたるとする。このとき、$\Phi(M)$ は乗法的であり、さらに、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Phi(\ AB\ ) &= \Phi(A)\Phi(B)\ . \\ \Phi(M) &= N(M)\prod_{P}\left(\ 1-\frac{1}{N(P)}\ \right)\ . \end{aligned}$$

イデアルで mod をとったとき、その個数について、以下が成り立つ。

補題 3.29 [高木, p.306-307]
M をイデアルとおく。このとき、

$$\sum_{A \bmod M} 1 = N(M)$$

が成り立つ。

次に、Ramanujan 和を定義する。

定義 3.30 $l \in \mathbf{Z}[\omega]$、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^{*}$ とする。このとき、Ramanujan 和 $c_l(n)$ を以下のように定義する。

$$c_l(\ n\ ) := \sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (\ h,(l)\ )=(1)}} e^{2\pi i[\ n,\frac{h}{l}\ ]}\ .$$

次に、Möbius 関数を定義する。

定義 3.31 $l \in \mathbf{Z}[\omega]$ とする。$1 \leq i \leq k \in \mathbf{Z}$ のとき、(p) と P_i を素イデアルとする。このとき、Möbius 関数 $\mu\left(\ (l)\ \right)$ を以下のように定義する。

$$\mu\left(\ (l)\ \right) := \begin{cases} 1 & (l) = (1) \\ 0 & (p)^2 \supset (l) \\ (-1)^k & (l) = P_1 \cdots P_k \end{cases}\ .$$

Ramanujan 和について考えていく。

補題 3.32 $k \in \mathbf{Z}[\omega]$、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。このとき、

$$\eta_k(n) := \sum_{h \bmod (k)} e^{2\pi i[\ n, \frac{h}{k}\ ]}$$

とおく。すると、

$$\eta_k(n) = \begin{cases} N\,(\ (k)\ ) & \frac{n}{k} \in \mathbf{Z}[\omega]^* \text{のとき}\ , \\ 0 & \text{その他のとき}\ . \end{cases}$$

証明　補題 3.33 [高木, p.278-280]
A をイデアルとする。このとき、

$$A = [\ a, b + c\omega\ ]$$

とおける。但し、a は、$0 < a$ であり、かつ A に含まれる最小有理整数、b は、$0 \leq b < a$ を満たす有理整数、c は、$0 < c$ であり、かつ A の各数に共通な最大の有理約数である。

補題 3.33 を用いると、$(k) = [\ a, b + c\omega\ ]$ とおけ、$0 \leq x_0 < a$、$0 \leq y_0 < c$ とすると、$h \equiv x_0 + y_0\omega \bmod (k)$ とおける。よって、

$$\begin{aligned} \eta_k(n) &= \sum_{x_0}^{a-1}\sum_{y_0}^{c-1} e^{2\pi i\left(Re\ \frac{\overline{n}(\ x_0 + y_0\omega\ )}{k}\ \right)} \\ &= \sum_{x_0}^{a-1} e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\ )x_0} \sum_{y_0}^{c-1} e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\omega\ )y_0}\ . \end{aligned} \tag{24}$$

このとき、$Re\ \frac{\overline{n}}{k}$ と $Re\ \frac{\overline{n}}{k}\omega$ が共に整数でないときを考える。

$$(\text{式 }(24)) = \frac{1 - e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\ )a}}{1 - e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\ )}} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\omega\ )c}}{1 - e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\omega\ )}}\ . \tag{25}$$

$a \in (k)$ より、$a = kk_1,\ k_1 \in \mathbf{Z}[\omega]$ とおける。このとき、$Re\ \frac{\overline{n}}{k}a = Re\ \overline{n}k_1 = [\ n, (k_1)\ ]$ であり、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ と $k_1 \in \mathbf{Z}[\omega]$ から、$[\ n, k_1\ ] \in \mathbf{Z}$ となる。よって、

$$(25) = 0 \cdot \frac{1 - e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\omega\ )c}}{1 - e^{2\pi i(\ Re\ \frac{\overline{n}}{k}\omega\ )}} = 0\ .$$

次に、$Re\ \frac{\overline{n}}{k}$ と $Re\ \frac{\overline{n}}{k}\omega$ が共に整数であるときを考える。このとき、$[\ \frac{n}{k}, 1\ ] \in \mathbf{Z}$ かつ $[\ \frac{n}{k}, \omega\ ] \in \mathbf{Z}$ であるので、$\frac{n}{k} \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ となる。よって、$h \in \mathbf{Z}[\omega]$ より、

$$e^{2\pi i[\ n, \frac{h}{k}\ ]} = 1$$

よって、補題 3.29 より、

$$\eta_k(n) = \sum_{h \bmod (k)} 1 = N\,(\ (k)\ )\ .$$

よって、補題 3.32 が示された。

$\eta_k(n)$ と Ramanujan 和の関係を考える。

補題 3.34 $k \in \mathbf{Z}[\omega]$、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。このとき、

$$\sum_{(d)\supset(k)} c_d(n) = \eta_k(n)\ .$$

証明 まず、n と k を固定する。$\eta_k(n)$ の定義から、

$$\sum_{(d)\supset(k)} c_d(n) = \sum_{(d)\supset(k)} \sum_{\substack{h \bmod (d) \\ (\ h,(d)\ )=(1)}} e^{2\pi i[\ n,\frac{h}{d}\ ]}\ .$$

ここで、$(k) := (d)(d_1)$、$h_1 := hd_1$ とおく。$(\ h,(d)\ ) = (1)$ と $(\ hd_1,(d)(d_1)\ ) = (d_1)$ と $(\ h_1,(k)\ ) = (d_1)$ は全て同値となる。補題 3.33 の条件を満たすような、$0 < d_2$ 、 $0 < d_4$ と $0 \le d_3 < d_2$ をとると、$(d) := [\ d_2, d_3 + d_4\omega\ ]$ とおける。そこで、 $0 \le x_0 < d_2$ かつ $0 \le y_0 < d_4$ とすると、$h \bmod (d)$ と $x_0+y_0\omega \bmod (d)$ は同値である。このことから、$(\ dd_1\ ) = [\ d_1d_2, d_1d_3+d_1d_4\omega\ ]$ とおける。$0 \le x_1 < d_1d_2$ かつ $0 \le y_1 < d_1d_4$ とすると、$(h)(d_1) \bmod (d)(d_1)$ と $x_1 + y_1\omega \bmod (d)(d_1)$ は同値となる。

$$e^{2\pi i[\ n,\frac{h}{d}\ ]} = e^{2\pi i[\ n,\frac{hd_1}{dd_1}\ ]}$$

なので、

$$\sum_{(d)\supset(k)} \sum_{\substack{h \bmod (d) \\ (\ h,(d)\ )=(1)}} e^{2\pi i[\ n,\frac{h}{d}\ ]} = \sum_{(d)\supset(k)} \sum_{\substack{h_1 \bmod (k) \\ (\ h_1,(k)\ )=(d_1)}} e^{2\pi i[\ n,\frac{h_1}{k}\ ]}\ . \tag{26}$$

$\forall x_1 + y_1\omega$ に対して、$(\ h_1,(k)\ ) = (d_1)$ となるような、$^{\exists 1}(d_1)$ が存在する。よって、$k \in \mathbf{Z}[\omega]$、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ のとき、

$$(\text{式 } (26)) = \sum_{h_1 \bmod (k)} e^{2\pi i[\ n,\frac{h_1}{k}\ ]} = \eta_k(n)\ .$$

よって、補題 3.34 が示された。
補題 3.34 を更に変形するために、Möbius の反転公式を考える。まず、その準備をする。

補題 3.35 $(l) \subset \mathbf{Z}[\omega]$ とする。$\mu(\ (l)\ )$ は乗法的である。

証明 定義 3.31 より、$\mu(\ (1)\ ) = 1$ となる。次に $(\ (m),(n)\ ) = (1)$ のときを考える。まず、その中の $(m) = (1)$ のときを考えると、

$$\begin{aligned} \mu(\ (m)(n)\ ) &= \mu(\ (n)\ )\ , \\ \mu(\ (m)\ )\,\mu(\ (n)\ ) &= \mu(\ (n)\ ) \end{aligned}$$

となる。$(n)=(1)$ の時も同様となる。次に、$(m)\neq(1)$ かつ $(n)\neq(1)$ のときを考える。まず、その中の (m) が同じ素因子を 2 つ以上持つときを考える。定義 3.31 より、

$$\begin{aligned}\mu(\ (m)(n)\ ) &= 0\ ,\\ \mu(\ (m)\ )\,\mu(\ (n)\ ) &= 0\end{aligned}$$

となる。(n) が同じ素因子を 2 つ以上持つときも同様となる。次に、(m) と (n) が各イデアルで、同じ素因子を持たないときを考える。$1\leq i\leq r\in\mathbf{Z}$、$1\leq j\leq k\in\mathbf{Z}$ とし、P_i と Q_j を素イデアルとし、$(m):=P_1\cdots P_r$、$(n):=Q_1\cdots Q_k$ とする。

$$\begin{aligned}\mu(\ (m)(n)\ ) &= (-1)^{r+k}\ ,\\ \mu(\ (m)\ )\,\mu(\ (n)\ ) &= (-1)^r(-1)^k=(-1)^{r+k}\ .\end{aligned}$$

よって、補題 3.35 が示された。

次も、Möbius の反転公式を考えるための準備である。

補題 3.36 $N(\ (n)\ )>1$ のとき、

$$\sum_{(d)\supset(n)}\mu(\ (d)\ )=0\ .$$

証明 $(n):=P_1^{a_1}\cdots P_k^{a_k}$ とおく。但し、P_i は素イデアルであり、$i=1\cdots k$ とする。$N(\ (n)\ )>1$ と 3.35 より、

$$\begin{aligned}\sum_{(d)\supset(n)}\mu(\ (d)\ ) &= \sum_{0\ \leq\ x_i\ \leq a_i}\mu(\ P_1^{x_1}\cdots P_k^{x_k}\ )\\ &= \mu(\ (1)\ )\\ &\quad +\mu(\ P_1\ )+\cdots+\mu(\ P_k\ )\\ &\quad +\mu(\ P_1P_2\ )+\cdots+\mu(\ P_{k-1}P_k\ )\\ &\quad +\cdots\\ &\quad +\mu(\ P_1\cdots P_k\ )\\ &= 1-k+(-1)^2\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k\\3\end{pmatrix}+\cdots+(-1)^k\begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}\\ &= (\ 1-1\ )^k\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

よって、補題 3.36 が示された。

ここで、Möbius の反転公式を考える。

補題 3.37 $\forall F$、$\forall G$ を整数論的関数とすると、

$$\sum_{(d)\supset(n)} F(d) = G(n)$$

が成立するとき、

$$F(n) = \sum_{(d)\supset(n)} \mu\left(\ (\frac{n}{d})\ \right) G(d)$$

が成立する。

証明

$$\begin{aligned}
\mu\left(\ (\frac{n}{d})\ \right) G(d) &= \sum_{(d)\supset(n)} \mu\left(\ (\frac{n}{d})\ \right) \sum_{(\delta)\supset(d)} F(\delta) \\
&= \sum_{(d)\supset(n)} \sum_{(\delta)\supset(d)} \mu\left(\ (\frac{n}{d})\ \right) F(\delta)\ . \qquad (27)
\end{aligned}$$

(n) を固定すると、(d) や (δ) の数は有限個なので、(27) において、和の順序を交換できる。よって、$n := dd_1$、$d := \delta\delta_1$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{n}{d} &= \frac{n}{\delta\delta_1}\ , \\
\frac{n}{\delta} &= \delta_1 \frac{n}{d}
\end{aligned}$$

となるので、$(\frac{n}{d}) \supset (\frac{n}{\delta})$ である。よって、

$$(式\ (27)) = \sum_{(\delta)\supset(n)} F(\delta) \sum_{(\delta_1)\supset(\frac{n}{\delta})} \mu(\ (\delta_1)\ )\ . \qquad (28)$$

ここで、補題 3.36 より、$N\left(\ (\frac{n}{\delta})\ \right) > 1$ のとき、

$$\sum_{(\delta_1)\supset(\frac{n}{\delta_1})} \mu(\ (\delta_1)\ ) = 0$$

となり、$N\left(\ (\frac{n}{\delta})\ \right) = (1)$ のとき、つまり、$(\frac{n}{\delta}) = 1$、$n = \delta$ のときのみを考えればよい。よって、

$$(式\ (28)) = F(n)\mu(\ (1)\ ) = F(n)\ .$$

よって、補題 3.37 が示された。

ここまでを踏まえると、Ramanujan 和について、以下の補題 3.38 が成立する。

補題 3.38 $k \in \mathbf{Z}[\omega]$、$n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。

$$c_k(n) = \sum_{\substack{(d)\supset(k) \\ \frac{n}{d}\in\mathbf{Z}[\omega]^*}} \mu\left(\ (\frac{k}{d})\ \right) N(\ (d)\ )\ .$$

証明 補題 3.34 に補題 3.32 と補題 3.37 を用いると、

$$\begin{aligned} c_k(n) &= \sum_{(d)\supset(k)} \mu\left((\frac{k}{d}) \right) \eta_d(n) \\ &= \sum_{\substack{(d)\supset(k) \\ \frac{n}{d}\in\mathbf{Z}[\omega]^*}} \mu\left((\frac{k}{d}) \right) N(\,(d)\,)\ . \end{aligned}$$

よって、補題 3.38 が示された。

次に、Dedekind zeta 関数について考える。

補題 3.39 $1 < \mathrm{Re}\ s \in \mathbf{C}$ のとき、(p) は (l) の異なる素イデアルをわたるとすると、

$$\zeta_K(s) := \sum_{(0)\neq(l)\subset\mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{N(\,(l)\,)^s} = \prod_{(p)} \left(1 - N(\,(p)\,)^{-s} \right)^{-1}$$

が成立し、右辺の無限積も $\zeta_K(s)$ と同様に、$\mathrm{Re}\ s > 1$ のとき、広義一様絶対収束する。

証明 $(m),(n) \in \mathbf{Z}[\omega]$ とし、$f(\,(m)\,) \equiv 1$ とする。このとき、$f(\,(1)\,) = 1$ かつ $f(\,(m)(n)\,) = f(\,(m)\,)f(\,(n)\,)$ より、f は乗法的である。$f(\,(l)\,) = O(1)$ なので、命題 3.24 より、$\mathrm{Re}\ s > 1$ に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{(0)\neq(l)\subset\mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{N(\,(l)\,)^s} &= \sum_{(0)\neq(l)\subset\mathbf{Z}[\omega]} \frac{f(\,(l)\,)}{N(\,(l)\,)^s} \\ &= \prod_{(p)} \left(\sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{f(\,(p)^\delta\,)}{N(\,(p)^\delta\,)^s} \right) \\ &= \prod_{(p)} \left(\sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\,(p)\,)^s}} \right) \\ &= \prod_{(p)} \left(1 - N(\,(p)\,)^{-s} \right)^{-1}\ . \end{aligned}$$

よって、補題 3.39 が示された。

命題 3.40

$$\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} \frac{S(\,0,n;l\,)}{|\,l\,|^{2s}} = \begin{cases} 6\frac{\zeta_K(\,s-1\,)}{\zeta_K(s)} & n = 0 \text{ のとき}\ , \\ 6\frac{\sigma_{1-s}(n)}{\zeta_K(s)} & n \neq 0 \text{ のとき}\ . \end{cases}$$

証明 まず、$n = 0$ のときを考える。定義 3.27 と補題 3.21 より、

$$\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} \frac{S(\,0,0;l\,)}{|\,l\,|^{2s}} = \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} \frac{1}{|\,l\,|^{2s}} \sum_{\substack{h \bmod (l) \\ (\,h,(l)\,)=(1)}} 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} \frac{\Phi(l)}{\mid l\mid^{2s}} \\
&= 6\sum_{(0)\neq(l)\subset\mathbf{Z}[\omega]} \frac{\Phi(\ (l)\ )}{N(\ (l)\ )^{s}} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

補題 3.28 より、

$$
\mid \Phi(\ (l)\ ) \mid\leq N(\ (l)\ ) =\mid l\mid^{2}
$$

となるので、命題 3.24 を用いる。$\left|\frac{1}{N(\ (p)\ )^{s-1}}\right| < 1$ であることに注意すると、Re $s > 2$ のとき、(p) は (l) の異なる素イデアルをわたるとすると、

$$
\begin{aligned}
(\text{式 } (29)) &= 6\prod_{(p)}\left(\sum_{\delta=0}^{\infty}\frac{\Phi\left(\ (p)^{\delta}\ \right)}{N(\ (p)^{\delta}\ )^{s}}\right) \\
&= 6\prod_{(p)}\left(\Phi\left(\ (1)^{\delta}\ \right)+\frac{\Phi(\ (p)\ )}{N(\ (p)\ )^{s}}+\frac{\Phi\left(\ (p)^{2}\ \right)}{N(\ (p)\ )^{2s}}+\cdots\cdots\right) \\
&= 6\prod_{(p)}\left(1+\frac{1-\frac{1}{N(\ (p)\ )}}{N(\ (p)\ )^{s-1}}\left(1+\frac{1}{N(\ (p)\ )^{s-1}}+\frac{1}{N(\ (p)\ )^{2(\ s-1\ )}}+\cdots\cdots\right)\right) \\
&= 6\prod_{(p)}\frac{1-\frac{1}{N(\ (p)\ )^{s-1}}+\frac{1}{N(\ (p)\ )^{s-1}}-\frac{1}{N(\ (p)\ )^{s}}}{1-\frac{1}{N(\ (p)\ )^{s-1}}} \\
&= 6\frac{\zeta_{K}(\ s-1\ )}{\zeta_{K}(s)}\ .
\end{aligned}
$$

次に、$n\neq 0$ のときを考える。補題 3.4、補題 3.21、定義 3.30 を用いると、

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\frac{S(\ 0,n;l\ )}{\mid l\mid^{2s}} &= \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\frac{1}{\mid l\mid^{2s}}\sum_{\substack{h \bmod (l)\\ (\ h,(l)\ )=(1)}} e^{2\pi i[\ n,\frac{h}{l}\ ]}\ , \\
&= \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\frac{c_{l}(n)}{\mid l\mid^{2s}}\ , \\
&= 6\sum_{(0)\neq(l)\subset\mathbf{Z}[\omega]}\frac{c_{(l)}(n)}{N(\ (l)\ )^{s}}\ , \qquad (30)
\end{aligned}
$$

さらに、補題 3.38 を用いると、

$$
\begin{aligned}
\frac{c_{(l)}(n)}{N(\ (l)\ )^{s}} &= \sum_{\substack{(d)\supset(l)\\ \frac{n}{d}\in\mathbf{Z}[\omega]^{*}\\ l=rd}}\frac{\mu(\ (r)\ )N(\ (d)\ )}{N(\ (r)(d)\ )^{s}} \\
&= \sum_{\substack{(d)\supset(l)\\ \frac{n}{d}\in\mathbf{Z}[\omega]^{*}\\ l=rd}}\frac{\mu(\ (r)\ )}{N(\ (r)\ )^{s}}N(\ (d)\ )^{1-s}\ .
\end{aligned}
$$

よって、

$$(\text{式 (30)}) = 6 \sum_{(0)\neq(l)\subset\mathbf{Z}[\omega]} \sum_{\substack{(d)\supset(l)\\ \frac{n}{d}\in\mathbf{Z}[\omega]^* \\ l=rd}} \frac{\mu(\ (r)\ )}{N(\ (r)\ )^s} N(\ (d)\ )^{1-s}\ . \tag{31}$$

$l = rd$ より、$(d) \supset (l)$ はすべての (r) で満たし、(r) を全てに渡らせると、(r) で和を取っても同じになる。よって、

$$(\text{式 (31)}) = \sum_{(0)\neq(r)\subset\mathbf{Z}[\omega]} \frac{\mu(\ (r)\ )}{N(\ (r)\ )^s} \cdot 6 \sum_{\frac{n}{r}\in\mathbf{Z}[\omega]^*} |\ r\ |^{2(\ 1-s\ )}\ . \tag{32}$$

$$\begin{aligned} 6 \sum_{\substack{\frac{n}{r}\in\mathbf{Z}[\omega]^* \\ (0)\neq(r)\subset\mathbf{Z}[\omega]}} |\ r\ |^{2(\ 1-s\ )} &= \sum_{\frac{n}{r}\in\mathbf{Z}[\omega]^*} |\ r\ |^{2(\ 1-s\ )} \\ &= \sum_{\frac{n}{r}\in\mathbf{Z}[\omega]^*} N\ |\ \overline{r}\ |^{2(\ 1-s\ )} \\ &= 6\sigma'_{1-s}(n)\ . \end{aligned} \tag{33}$$

(31) の残りの部分において、(p) を (r) の異なる素イデアルをわたるとする。定義 3.31 より、$|\ \mu(\ (r)\ )\ | = 1 = O(1)$ であることと補題 3.35 より、命題 3.24 を用いると、$Re\ s > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{(0)\neq(r)\in\mathbf{Z}[\omega]} \frac{\mu(\ (r)\ )}{N(\ (r)\ )^s} &= \prod_{(p)} \left(\sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{\mu(\ (p)^\delta\ )}{N(\ (p)^\delta\ )^s} \right) \\ &= \prod_{(p)} \left(\frac{\mu(\ (1)\ )}{N(\ (1)\ )} + \frac{\mu(\ (p)\ )}{N(\ (p)\ )^s} + 0 \right) \\ &= \prod_{(p)} \left(1 - \frac{1}{N(\ (p)\ )^s} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta_K(s)}\ . \end{aligned} \tag{34}$$

式 (33) と式 (34) を式 (32) に代入すると、

$$(\text{式 (32)}) = 6\frac{\sigma'_{1-s}(n)}{\zeta_K(s)}\ .$$

よって、命題 3.40 が示された。これまでで、Eisenstein 級数の Fourier 展開がわかる。

命題 3.41

$$\begin{aligned} E(\ z, s\ ) &= y^s + \frac{\pi}{s-1}\frac{\zeta_K(\ s-1\ )}{\zeta_K(s)} y^{2-s} \\ &\quad + \frac{2\pi^s y}{\Gamma(s)\zeta_K(s)} \sum_{0\neq n\in\mathbf{Z}[\omega]^*} |\ n\ |^{s-1}\ \sigma'_{1-s}(n) K_{s-1}(\ 2\pi\ |\ n\ |\ y\ ) e^{2\pi i[\ n,x\ ]}\ . \end{aligned}$$

証明 命題 3.1、補題 3.12、補題 3.15 と命題 3.40 より、

$$
\begin{aligned}
E(\ z,s\ ) &= \frac{1}{3}P_0(\ z,s\ ) \\
&= \frac{1}{3}\left\{ y^s e^{2\pi|0|y} \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ 0,\rho x\ ]} + \frac{1}{2}y^{2-s}\cdot\frac{\pi}{s-1}\cdot 6\frac{\zeta_K(\ s-1\ )}{\zeta_K(s)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}y^{2-s}\sum_{0\neq n\in\mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ n,x\ ]}\cdot\frac{2\pi^s\mid ny^{s-1}\mid K_{s-1}(\ 2\pi\mid n\mid y\ )}{\Gamma(s)}\cdot 6\frac{\sigma'_{1-s}(n)}{\zeta_K(s)} \right\} \\
&= y^s + \frac{\pi}{s-1}\frac{\zeta_K(\ s-1\ )}{\zeta_K(s)}y^{2-s} \\
&\quad + \frac{2\pi^s y}{\Gamma(s)\zeta_K(s)}\sum_{0\neq n\in\mathbf{Z}[\omega]^*}\mid n\mid^{s-1}\sigma'_{1-s}(n)K_{s-1}(\ 2\pi\mid n\mid y\ )e^{2\pi i[\ n,x\ ]}\ .
\end{aligned}
$$

よって、命題 3.41 が示された。

補題 3.42 $E(\ z,s\ )$ は $\mathbf{C}$ 上有理形であり、$s=2$ のとき、１位の極であり、$s\neq 2$ かつ Re $s\geq 1$ を満たす $s\in\mathbf{C}$ のとき、正則である。

証明 命題 3.41 と $\zeta_K(s)$ の性質 ([Zagier, p.101-103]) を用いる。よって、補題 3.42 が示された。

3.4 内積の計算１

Poincaré 級数で、L^2 内積が計算できるかどうかを確かめる。

補題 3.43 $m\neq 0$ のとき、

$$
P_m(\ z,s\ )\in L^2(\ \mathcal{F},d\mu\ )
$$

証明 補題 3.13 より、

$$
\iiint \left|P_m(\ z,s\ )\right|^2 d\mu(z)\ <\ \infty\ .
$$

を示せばよい。命題 3.1 より、

$$
\begin{aligned}
\left|P_m(\ z,s\ )\right| &\leq \underbrace{\left|y^s\ \exp(\ -2\pi\mid m\mid y\ )\sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]}\right|} \\
&\quad + \underbrace{\left|\frac{1}{2}y^{2-s}\sum_{m_2\in\mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ m_2,x\ ]}\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\mid l\mid^{-2s} S(\ m,m_2;l\ )A_s(\ m,m_2;l;y\ )\right|}
\end{aligned}
$$

となる。まず、x_1 と x_2 での積分は、$e^{2\pi i[\ \cdot, x\ ]}$ の項なので、値は 1 で抑えられる。次に、y での積分を考える。　と　それぞれにおいて、

$$\leq\ 3y^{\mathrm{Re}\ s}e^{-2\pi|m|y}$$

であり、3.8 より、$\mathrm{Re}\ s > \frac{3}{2}$ のとき、

$$\leq\ \frac{1}{2}y^{2-s}$$

となる。よって、$m \neq 0$、exponential factor が存在することと $\mathrm{Re}\ s > \frac{3}{2}$ に注意すると、

$$\iiint \left| P_m(\ z, s\ ) \right|^2\ d\mu(z)\ <\ \infty\ .$$

よって、補題 3.43 が示された。

命題 3.44 $m, n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。$s_1, s_2 \in \mathbf{C}$ で、$\frac{3}{2} < \mathrm{Re}\ s_1$ かつ $\frac{3}{2} < \mathrm{Re}\ s_2$ を満たすとする。とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ )\ \rangle \\ = \quad & \pi \frac{(4\pi)^{2-s_1-s_2}\ |\ m\ |^{1-s_1} |\ n\ |^{1-s_2}}{\Gamma\left(\ s_1 - \frac{1}{2}\ \right)\Gamma\left(\ s_2 - \frac{1}{2}\ \right)} \\ & \times \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)\Lambda(\ s_1, s_2; i\kappa_j\ ) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\ n\ |}{|\ m\ |} \right)^{it} \frac{\sigma_{it}(m)\sigma_{-it}(n)\Lambda(\ s_1, s_2; it\ )}{\left| \Gamma(\ 1+it\ )\zeta_K(\ 1+it\ ) \right|^2}\ dt \right\}\ . \end{aligned}$$

但し、

$$\Lambda(\ s_1, s_2; \lambda\ ) := \Gamma(\ s_1 - 1 + \lambda\ )\Gamma(\ s_1 - 1 - \lambda\ )\Gamma(\ s_2 - 1 + \lambda\ )\Gamma(\ s_2 - 1 - \lambda\ )$$

とする。

証明　補題 3.43 より、$\langle\ P_m(\cdot, s_1\ ), \psi_j\ \rangle$ を考えることができる。まず、$\langle\ P_m(\cdot, s_1\ ), \psi_j\ \rangle$ を計算する際の絶対収束から示す。

補題 3.45 $\langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_j\ \rangle$ の計算において、和と積分は交換可能である。

証明

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} \int_{\mathcal{F}} \left| y^{s_1}(\ \gamma(z)\ ) e^{-2\pi|m|y(\ \gamma(z)\ ) + 2\pi i[\ m, x(\ \gamma(z)\ )\ ]} \overline{\psi_j(z)} \right| \frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3}\ <\ \infty \tag{35}$$

を示せばよい。計算において、$x := x_1 + x_2\omega$ とおく。ここで、

補題 3.46 [Elstrodt etc., p.8-9]
$\gamma \in PSL(\ 2, \mathbf{C}\ )$ のとき、

$$\psi_j\left(\ \gamma(z)\ \right) = \psi_j(z)\ .$$

定義 2.6 と補題 3.46 より、

$$\begin{aligned}
& \langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_j\ \rangle \\
= & \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} \int_{\gamma(\mathcal{F})} y^{s_1} e^{-2\pi|m|y+2\pi i[\ m,x\ ]} \overline{\psi_j(\ \gamma^{-1}(\ (z)\ )\ )}\ \frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3} \\
= & \int_{\Gamma_t \backslash \mathcal{H}^3} y^{s_1-3} e^{-2\pi|m|y+2\pi i[\ m,x\ ]} \overline{\psi_j(z)}\ dx_1 dx_2 dy \\
= & \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ m,x\ ]}\ dx_1 dx_2 \int_0^\infty y^{s_1-3+1} \\
& \times \sum_{0 \neq m_3 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} \overline{\rho_j(m_3)} K_{-i\kappa_j}(\ 2\pi \mid \overline{m_3} \mid y\ ) e^{-2\pi i[\ m_3,x\ ]}\ dy\ . \qquad (36)
\end{aligned}$$

式 (36) において、１つの m_3 について考える。$m_4 := m - m_3 = m_4' + m_4"i$ とおく。$m_4 \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ m_4,x\ ]}\ dx_1 dx_2 \int_0^\infty (\ y\ \text{の式}\ )\ dy \\
= & \int_0^1 e^{2\pi i m_4' x_1}\ dx_1 \int_0^1 e^{2\pi i\left(\ -\frac{1}{2}m_4' + \frac{\sqrt{3}}{2}m_4"\ \right)x_2}\ dx_2 \int_0^\infty (\ y\ \text{の式}\ )\ dy\ . \qquad (37)
\end{aligned}$$

$m_4' = 0$ かつ $m_4" = 0$ のとき、つまり、$m_3 = m$ のときのみ値が存在する。

$$\int_0^1 e^{2\pi i m_4' x_1}\ dx_1 \int_0^1 e^{2\pi i\left(\ -\frac{1}{2}m_4' + \frac{\sqrt{3}}{2}m_4"\ \right)x_2}\ dx_2 = 1$$

を用いると、

$$(\text{式 } (36)) = \int_0^\infty y^{s_1-2} \sum_{0 \neq m \in \mathbf{Z}[\omega]^*} \overline{\rho_j(m)} K_{-i\kappa_j}(\ 2\pi \mid \overline{m} \mid y\ ) e^{-2\pi i[\ m,x\ ]}\ dy$$

となる。そこで、式 (35) の左辺を考える。補題 3.18 を用いると、

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} \int_{\mathcal{F}} \left| \cdots\cdots \right| \frac{dx_1 dx_2 y}{y^3} \\
\leq & \int_0^\infty y^{\mathrm{Re}\ \ s_1-2} e^{-2\pi|\overline{m}|y} \mid \overline{\rho(m)} \mid \left| K_{-i\kappa_j}(\ 2\pi \mid \overline{m} \mid y\ ) \right|\ dy \\
\leq & \mid \overline{\rho_j(m)} \mid \int_0^\infty y^{\mathrm{Re}\ \ s_1-2} e^{-2\pi|m|y} \left| K_{i\kappa_j}(\ 2\pi \mid m \mid y\ ) \right|\ dy\ . \qquad (38)
\end{aligned}$$

補題 3.47 [Kuznecov, p.432 (4.32)]
$a > 0$ かつ $\mid \arg x \mid \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\mid x \mid \to \infty$ のとき、

$$K_\nu(\ ax\ ) \ll \mid x \mid^{-\frac{1}{2}}\ \ .$$

補題 3.48 [Erdélyi etc., p.5]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\ \pi\nu\ )} \{\ I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\ \}\ \ .$$

補題 3.49 [数学公式　, p.145]
$z \in \mathbf{C}$ かつ 0 より小さい実数でないとすると、

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^{2n}}{n!\Gamma(\ \nu + n + 1\ )}\ .$$

ここで、補題 3.47、補題 3.48 と補題 3.49 を式 (38) に用いる。$Y := 2\pi \mid m \mid y$ と変数変換すると、

$$(\text{式 } (38)) = \frac{\mid \overline{\rho_j(m)} \mid}{(\ 2\pi \mid m \mid\ )^{\mathrm{Re}\ s_1 - 1}} \int_0^\infty Y^{\mathrm{Re}\ s_1 - 2} e^{-Y} \left| K_{i\kappa_j}(Y) \right| dY\ . \tag{39}$$

$Y \to 0$ のとき、

$$\left| K_{i\kappa_j}(Y) \right| = \frac{\pi}{2\sin(\ i\pi\nu\ )} \{\ J_{-\nu}(0) - J_\nu(0)\ \} = 0$$

となり、$Y \to \infty$ のとき、

$$\left| K_{i\kappa_j}(Y) \right| \ll Y^{-\frac{1}{2}}$$

となるから、exponential factor に注意すると、

$$\int_0^\infty Y^{\mathrm{Re}\ s_1 - 2} e^{-Y} \left| K_{i\kappa_j}(Y) \right| dY \ll \int_0^\infty Y^{-2}\ dY\ <\ \infty\ .$$

となり、

$$(39) \ll \infty\ .$$

よって、補題 3.45 が示された。

計算に戻ると、補題 3.45 の証明より、

$$\langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_j\ \rangle = \frac{\overline{\rho_j(m)}}{(\ 2\pi \mid m \mid\ )^{s_1 - 1}} \int_0^\infty Y^{s_1 - 2} K_{i\kappa_j}(Y)\ dy\ . \tag{40}$$

補題 3.50 [Erdélyi etc., p.50 (26)]
Re ($\mu \pm \nu$) > 0 かつ Re ($\alpha + \beta$) > 0 のとき、

$$\begin{aligned} & \Gamma(\ \frac{1}{2} + \mu\ )\pi^{-\frac{1}{2}}(\ 2\beta\ )^{-\nu}(\ \alpha + \beta\ )^{\nu+\mu} \int_0^\infty e^{-\alpha t} K_\nu(\ \beta t\ )^{\mu - 1}\ dt \\ = \ & \Gamma(\ \mu + \nu\ )\Gamma(\ \mu - \nu\ )_2F_1 \left[\ \nu + \mu, \nu + \frac{1}{2}; \mu + \frac{1}{2}; \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\ \right]\ . \end{aligned}$$

補題 3.51 [数学公式　, p.55]
${}_pF_q$ を超幾何関数とし、$(\alpha)_0 := 1$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} (\alpha)_n := \alpha(\ \alpha + 1\ ) \cdots (\ \alpha + n - 1\ ) &= \frac{\Gamma(\ \alpha + n\ )}{\Gamma(\alpha)}\ , \\ {}_pF_q(\ \alpha_1, \cdots, \alpha_p; \beta_1, \cdots, \beta_q; z\ ) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

とする。$|\ z\ |< 1$ のとき、

$$\begin{aligned} F(\ \alpha, \beta, \gamma; z\ ) &:= {}_2F_1(\ \alpha, \beta; \gamma; z\ ) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\ \alpha+n\ )\Gamma(\ \beta+n\ )}{\Gamma(\ \gamma+n\ )} \cdot \frac{z^n}{n!}\ . \end{aligned}$$

ここで、$\alpha = 1$ 、 $\beta = 1$ 、 $\nu = i\kappa_j$ と $\mu = s_1 - 1$ とおくと、$\mathrm{Re}\ (\ \mu \pm \nu\ ) = \mathrm{Re}\ \ \mu > \frac{1}{2} > 0$ かつ $\mathrm{Re}\ (\ \alpha + \beta\ ) = 2 > 0$ より、補題 3.50 の条件を満たす。よって、補題 3.50 を用いると、

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} Y^{s_1-2} K_{i\kappa_j}(Y)\ dy \\ = &\ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\ s_1 - 1 + i\kappa_j\ )\Gamma(\ s_1 - 1 - i\kappa_j\ )}{\Gamma(\ s_1 - \frac{1}{2}\ )2^{s_1-1+i\kappa_j}2^{-i\kappa_j}} {}_2F_1\left(\ s_1 - 1 + i\kappa_j, i\kappa_j + \frac{1}{2}; s_1 - \frac{1}{2}; 0\ \right)\ . \end{aligned}$$

さらに、$\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right| = 0 < 1$ より、補題 3.51 の条件を満たす。補題 3.51 を用いると、

$${}_2F_1\left(\ s_1 - 1 + i\kappa_j, i\kappa_j + \frac{1}{2}; s_1 - \frac{1}{2}; 0\ \right) = 1\ .$$

ゆえに、

$$\int_0^{\infty} Y^{s_1-2} K_{i\kappa_j}(Y)\ dy = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-s_1} \Gamma(\ s_1 - 1 + i\kappa_j\ )\Gamma(\ s_1 - 1 - i\kappa_j\ )}{\Gamma(\ s_1 - \frac{1}{2}\ )}\ . \quad (41)$$

式 (41) を式 (40) に代入すると、

$$\langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_j\ \rangle \ = \ \frac{(\ 4\pi\ )^{1-s_1}\pi^{\frac{1}{2}}\ |\ m\ |^{1-s_1}}{\Gamma(\ s_1 - \frac{1}{2}\ )}\Gamma(\ s_1 - 1 + i\kappa_j\ )\Gamma(\ s_1 - 1 - i\kappa_j\ )\overline{\rho_j(m)}\ . \quad (42)$$

同様に、$\langle\ \overline{P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ ), \psi_j}\ \rangle$ を計算すると、

$$\langle\ \overline{P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ ), \psi_j}\ \rangle \ = \ \frac{(\ 4\pi\ )^{1-s_2}\pi^{\frac{1}{2}}\ |\ n\ |^{1-s_s}}{\Gamma(\ s_2 - \frac{1}{2}\ )}\Gamma(\ s_2 - 1 + i\kappa_j\ )\Gamma(\ s_2 - 1 - i\kappa_j\ )\rho_j(n)\ . \quad (43)$$

ここで、$j = 0$ のときを考える。補題 2.16 に注意すると、同様に、

$$\begin{aligned} \langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_0\ \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ m, x\ ]}\ dx_1 dx_2 \int_0^{\infty} y^{s_1-3} \left|\mathcal{F}\right|^{-\frac{1}{2}}\ dy\ . \\ \langle\ P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ ), \psi_0\ \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ n, x\ ]}\ dx_1 dx_2 \int_0^{\infty} y^{\overline{s_2}-3} \left|\mathcal{F}\right|^{-\frac{1}{2}}\ dy\ . \end{aligned}$$

ここで、$mn \neq 0$ より、$\langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_0\ \rangle = 0$ かつ $\langle\ P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ ), \psi_0\ \rangle = 0$ よって、

$$\langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_0\ \rangle \overline{\langle\ P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ ), \psi_j\ \rangle} = 0\ . \quad (44)$$

次に、$\mathcal{E}\ (\ t, P_m(\ z, s_1\ )\ )$ について考える。まず、計算過程の絶対収束を考える。

補題 3.52 $\mathcal{E}(\ t, P_m(\ z, s_1\ )\ )$ において、和と積分の順序を交換できる。

証明

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_t\backslash\Gamma}\int_{\gamma(\mathcal{F})}\left|y^{s_1}\ (\ \gamma(z)\ )\,e^{-2\pi|m|y(\ \gamma(z)\ )+2\pi i[\ m,x(\ \gamma(z)\ )\ ]}E(\ z,1-it\ )\right|\,d\mu(z)\ <\ \infty$$

を示せばよい。$x := x_1 + x_2\omega$ とおく。定義 2.6、補題 3.8 と補題 3.14 に注意すると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\Gamma_t\backslash\Gamma}\int_{\gamma(\mathcal{F})}\left|y^{s_1}\ (\ \gamma(z)\ )\,e^{-2\pi|m|y(\ \gamma(z)\ )+2\pi i[\ m,x(\ \gamma(z)\ )\ ]}E(\ z,1-it\ )\right|\,d\mu(z)\\
=\ &\int_{\gamma\in\Gamma_t\backslash\mathcal{H}^3} y^{\mathrm{Re}\ s_1-3}e^{-2\pi|m|y}\mid e^{2\pi i[\ m,x\ ]}\mid\left|E(\ z,1-it\ )\right|\,d\mu(z)\\
\ll\ &\int_0^1\int_0^1 1\ dx_1dx_2\int_0^\infty y^{\mathrm{Re}\ s_1-3}e^{-2\pi|m|y}\ dy\\
\ll\ &\int_0^\infty y^2\ dy\ <\ \infty\ .
\end{aligned}$$

よって、補題 3.52 が示された。

命題 3.41 と補題 3.52 を用いて、計算する。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(\ t, P_m(\ z, s_1\ )\ )\\
=\ &\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i[\ m,x\ ]}\ dx_1dx_2\\
&\times\int_0^\infty y^{s_1-3}e^{-2\pi|m|y}\left\{\ y^{1-it}+\frac{\pi}{-it}\frac{\zeta_K(\ -it\ )}{\zeta_K(\ 1-it\ )}y^{1+it}+\frac{2\pi^{1-it}y}{\Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )}\right.\\
&\left.\times\sum_{0\neq n_1\in\mathbf{Z}[\omega]^*}\mid n_1\mid^{-it}\ \sigma'_{it}(n_1)K_{-it}(\ 2\pi\mid n_1\mid y\ )e^{-2\pi i[\ n_1,x\ ]}\ \right\}\ dy\ .
\end{aligned}\tag{45}$$

ここで、$m \neq 0$ と補題 3.8 に注意すると、

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i[\ m,x\ ]}\ dx_1dx_2\int_0^\infty y^{s_1-3}e^{-2\pi|m|y}\left\{\ y^{1-it}+\frac{\pi}{-it}\frac{\zeta_K(\ -it\ )}{\zeta_K(\ 1-it\ )}y^{1+it}\ \right\}\\
=\ &0\cdot\int_0^\infty y^{s_1-3}e^{-2\pi|m|y}\left\{\ y^{1-it}+\frac{\pi}{-it}\frac{\zeta_K(\ -it\ )}{\zeta_K(\ 1-it\ )}y^{1+it}\ \right\}\\
=\ &0\ .
\end{aligned}\tag{46}$$

次に、１つの n_1 で考える。$m + n_1 \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i[\ m+n_1,x\ ]}\ dx_1dx_2\\
&\times\int_0^\infty y^{s_1-2}e^{-2\pi|m|y}\left\{\ \frac{2\pi^{1-it}}{\Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )}\mid n_1\mid^{-it}\ \sigma'_{it}(n_1)K_{-it}(\ 2\pi\mid n_1\mid y\ )\ \right\}\ dy\\
=\ &0\cdot\int_0^\infty y^{s_1-2}e^{-2\pi|m|y}\left\{\ \frac{2\pi^{1-it}}{\Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )}\mid n_1\mid^{-it}\ \sigma'_{it}(n_1)K_{-it}(\ 2\pi\mid n_1\mid y\ )\ \right\}\ dy\\
=\ &0\ .
\end{aligned}\tag{47}$$

$m + n_1 = 0$ のとき、つまり、$n_1 = -m$ のとき、

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ m+n_1,x\ ]}\ dx_1 dx_2 \\
& \times \int_0^\infty y^{s_1-2} e^{-2\pi|m|y} \left\{ \frac{2\pi^{1-it}}{\Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )} \mid n_1 \mid^{-it} \sigma'_{it}(n_1) K_{-it}(\ 2\pi \mid n_1 \mid y\ ) \right\} dy \\
= & \int_0^\infty y^{s_1-2} e^{-2\pi|m|y} \\
& \times \left\{ \frac{2\pi^{1-it}}{\Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )} \mid n_1 \mid^{-it} \sigma'_{it}(n_1) K_{-it}(\ 2\pi \mid n_1 \mid y\ ) \right\} dy\ . \qquad (48)
\end{aligned}$$

式 (46) と式 (48) を式 (45) に代入する。$<\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), \psi_j\ >$ のときと同様に、

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\ t, P_m(\ z, s_1\ )\ ) &= \frac{2\pi^{1-it} \mid -m \mid^{-it} \sigma'_{it}(\ -m\ )}{\Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )} \int_0^\infty y^{s_1-2} e^{-2\pi|m|y} K_{-it}(\ 2\pi \mid -m \mid y\ )\ dy \\
&= \frac{2\pi^{1-it} \mid m \mid^{-it} \sigma'_{it}(\ -m\ )}{\Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )} \int_0^\infty y^{s_1-2} e^{-2\pi|m|y} K_{-it}(\ 2\pi \mid m \mid y\ )\ dy \\
&= \frac{(\ 4\pi\ )^{1-s_1} \mid m \mid^{1-s_1} \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\ s_1 - \frac{1}{2}\ )} \cdot \frac{2\pi^{1-it} \sigma'_{it}(\ -m\ ) \Gamma(\ s_1 - 1 + it\ ) \Gamma(\ s_1 - 1 - it\ )}{\mid m \mid^{it} \Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )}\ .
\end{aligned}$$

ここで、

補題 3.53

$$\sigma'_\nu(m) = \sigma'_\nu(\ -m\ )\ ,$$

証明 $\frac{-m}{d} \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ のとき、$\frac{m}{-d} \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ となることと、定義 1.5 より、

$$\begin{aligned}
\sigma'_\nu(\ -m\ ) &= \frac{1}{6} \sum_{\frac{-m}{d} \in \mathbf{Z}[\omega]^*} \mid d \mid^{2\nu}\ , \\
&= \frac{1}{6} \sum_{\frac{m}{-d} \in \mathbf{Z}[\omega]^*} \mid d \mid^{2\nu}\ , \\
&= \frac{1}{6} \sum_{\frac{m}{-d} \in \mathbf{Z}[\omega]^*} \mid -d \mid^{2\nu}\ , \\
&= \sigma'_\nu(m)\ .
\end{aligned}$$

よって、補題 3.53 が示された。

補題 3.53 を用いると、

$$\mathcal{E}(\ t, P_m(\ z, s_1\ )\ ) = \frac{(\ 4\pi\ )^{1-s_1} \mid m \mid^{1-s_1} \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\ s_1 - \frac{1}{2}\ )} \frac{2\pi^{1-it} \sigma'_{it}(m) \Gamma(\ s_1 - 1 + it\ ) \Gamma(\ s_1 - 1 - it\ )}{\mid m \mid^{it} \Gamma(\ 1-it\ )\zeta_K(\ 1-it\ )}\ . \qquad (49)$$

同様に、$\overline{\mathcal{E}(\ t,P_n(\ z,\overline{s_2}\ ))}$ を変形する。

$$\overline{\mathcal{E}(\ t,P_n(\ z,\overline{s_2}\ )\ )} \quad = \quad \frac{(\ 4\pi\ )^{1-s_2}\mid n\mid^{1-s_2}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\ s_2-\frac{1}{2}\ )}\frac{2\pi^{1+it}\sigma'_{-it}(n)\Gamma(\ s_2-1+it\ )\Gamma(\ s_2-1-it\ )}{\mid n\mid^{-it}\Gamma(\ 1+it\ )\zeta_K(\ 1+it\ )}\ . \tag{50}$$

補題 2.16 に式 (42)、式 (43)、式 (44)、式 (49) と式 (50) を代入する。よって、命題 3.44 が示された。

補題 3.54 命題 3.44 の和と積分は収束する。

証明 第 3.5 項で示す。

3.5 内積の計算２

内積を定義に戻って、計算していく。まず、$A_s(\ m,n;l;y\ )$ を変形する。

補題 3.55 $m,n\in\mathbf{Z}[\omega]^*$、$l\in\mathbf{Z}[\omega]$ とする。

$$\begin{aligned}
&A_s(\ m,n;l;y\ )\\
=\ &2\pi\int_0^\infty\frac{r}{(\ r^2+1\ )^s}\\
&\times J_0\left(\ 2\pi r\left|ny+\frac{\overline{m}}{l^2(\ r^2++1\ )y}\right|\ \right)e^{-\frac{2\pi|m|}{|l|^2(\ r^2+1\ )y}}\ dr\ .
\end{aligned}$$

証明 補題 3.5 の証明と同様に、極座標表示を用いると、

$$\begin{aligned}
A_s(\ m,n;l;y\ ) \quad = \quad &\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r}{(\ \mid r\mid^2+1\ )^s}e^{-2\pi iy[\ n,re^{i\theta}\ ]}\\
&\times e^{-\frac{2\pi|m|}{|l|^2(\ r^2+1\ )y}}e^{-\frac{2\pi i[\ l^{-2},mre^{i\theta}\ ]}{(\ r^2+1\ )y}}\ d\theta dr\ ,
\end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
[\ n,re^{i\theta}\ ] \quad &= \quad r(\ n_1\cos\theta+n_2\sin\theta\ )\ ,\\
[\ l^{-2},m\eta\ ] \quad &= \quad \frac{r}{\mid l\mid^4}\left\{\ [\ (\ l_1^2-l_2^2\ )m'-2m"l_1l_2\ ]\cos\theta-[\ (\ l_1^2-l_2^2\ )m"+2m'l_1l_2\ ]\sin\theta\ \right\}
\end{aligned}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
&-2\pi iy[\ n,re^{i\theta}\ ]-\frac{2\pi i[\ l^{-2},mre^{i\theta}\ ]}{(\ r^2+1\ )y}\ ,\\
=\ &-2\pi ir\left\{\ \underbrace{\left[\ n_1y+\frac{(\ l_1^2-l_2^2\ )m'-2m"l_1l_2}{\mid l\mid^4(\ r^2+1\ )y}\ \right]}\cos\theta\right.
\end{aligned}$$

$$+\underbrace{\left[\ n_2 y-\frac{(\ l_1^2-l_2^2\ )m"+2m'l_1l_2}{|\ l\ |^4\ (\ r^2+1\ )y}\ \right]}\sin\theta\ \Bigg\}$$

となる。さらに、　と　について、計算すると、

$$\begin{aligned}
{}^2+\quad{}^2 &= \left(\ ny+\frac{\overline{m}}{l^2(\ r^2+1\ )y}\ \right)\left(\ \overline{ny}+\frac{m}{\overline{l}^2(\ r^2+1\ )y}\ \right)\\
&= \left|ny+\frac{\overline{m}}{l^2(\ r^2+1\ )y}\right|^2
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$e^{-2\pi iy[\ n,re^{i\theta}\ ]-\frac{2\pi i[\ l^{-2},mre^{i\theta}\ ]}{(\ r^2+1\ )y}}=e^{-2\pi ir\left|ny+\frac{\overline{m}}{l^2(\ r^2+1\ )y}\right|\cos(\ \theta-\theta_1\ )}.$$

但し、

$$\begin{aligned}
\cos\theta_1 &= \frac{}{\left|ny+\frac{\overline{m}}{l^2(\ r^2+1\ )y}\right|},\\
\sin\theta_1 &= \frac{}{\left|ny+\frac{\overline{m}}{l^2(\ r^2+1\ )y}\right|}
\end{aligned}$$

とする。$M:=2\pi r\left|ny+\frac{\overline{m}}{l^2(\ r^2+1\ )y}\right|$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&A_s(\ m,n;l;y\ )\\
&= \int_0^\infty\frac{r}{(\ |\ r\ |^2+1\ )^s}e^{-\frac{2\pi|m|}{|l|^2(\ r^2+1\ )y}}\int_0^{2\pi}e^{-i(\ M\cos(\ \theta-\theta_1\ )}d\theta dr\ .
\end{aligned}$$

ここで、$\theta_2:=\frac{\pi}{2}-(\ \theta-\theta_1\ )$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}e^{-i(\ M\cos(\ \theta-\theta_1\ )}d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}+\theta_1}^{-\frac{3}{2}+\theta_1}e^{i\left(\ -M\cos(\ \frac{\pi}{2}-\theta_2\ )\ \right)}(\ -d\theta_2\ )\\
&= \int_{-\frac{3}{2}+\theta_1}^{\frac{\pi}{2}+\theta_1}e^{i(\ -M\sin\theta_2\ )}d\theta_2\ . \qquad (51)
\end{aligned}$$

$\alpha:=-\frac{3}{2}+\theta_1$ とおくと、補題 3.16 より、

$$(51)=2\pi J_0(M)\ .$$

以上をまとめる。よって、補題 3.55 が示された。

２つの Poincaré 級数の内積を内積の定義に戻って変形すると、以下のようになる。

命題 3.56 $0 \neq m, n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。$s_1, s_2 \in \mathbf{C}$ で、$\frac{3}{2} < \mathrm{Re}\ s_1, \mathrm{Re}\ s_2$ を満たすとする。このとき、

$$\begin{aligned}
& \langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ )\ \rangle \\
= \ & (\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ )\Gamma(\ s_1 + s_2 - 2\ )(\ 4\pi \mid m \mid\ )^{2-s_1-s_2} \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2\pi|n|y} y^{s_2-s_1-1} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \mid l \mid^{-2s_1}\ S(\ m, n; l\ ) A_{s_1}(\ m, n; l; y\ )\ dy\ .
\end{aligned}$$

証明 定義 2.12 より、

$$\langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ )\ \rangle = \int_{\mathcal{F}} P_m(\ \cdot, s_1\ ) \overline{P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ )}\ d\mu(z) \tag{52}$$

となる。まず、計算過程において、必要な絶対収束を示す。

補題 3.57 式 (52) の右辺において、和と積分の順序を交換できる。

証明

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma \in \Gamma_t \backslash \Gamma} \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_t \backslash \Gamma} \int_{\mathcal{F}} \Big| y^{s_1}(\ \gamma(z)\ ) e^{-2\pi|m|y(\ \gamma(z)\ ) + 2\pi i[\ m, x(\ \gamma(z)\ )\ ]} \\
\times \ & y^{s_2}(\ \gamma_1(z)\ ) e^{-2\pi|n|y(\ \gamma_1(z)\ ) - 2\pi i[\ n, x(\ \gamma_1(z)\ )\ ]} \Big|\ d\mu(z)\ <\ \infty
\end{aligned} \tag{53}$$

を示せばよい。$x := x_1 + x_2\omega$ とおく。定義 2.6 と補題 3.13 より、

$$\begin{aligned}
& (\text{式 (53)) の左辺}) \\
= \ & \int_{\Gamma_t \backslash \mathcal{H}^3} \left| y^{s_1} e^{-2\pi|m|y + 2\pi i[\ m, x\ ]} y^{s_2} e^{-2\pi|n|y + 2\pi i[\ n, x\ ]} \right|\ d\mu(z) \\
\leq \ & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty y^{\mathrm{Re}\ (\ s_1 + s_2\ ) - 3} e^{-2\pi(\ |m| + |n|\ )y}\ dx_1 dx_2 dy \\
= \ & \int_0^\infty y^{\mathrm{Re}\ (\ s_1 + s_2\ ) - 3} e^{-2\pi(\ |m| + |n|\ )y}\ dx_1 dx_2 dy\ .
\end{aligned}$$

ここで、exponential factor に注意すると、

$$\int_0^\infty y^{\mathrm{Re}\ (\ s_1 + s_2\ ) - 3} e^{-2\pi(\ |m| + |n|\ )y}\ dx_1 dx_2 dy\ \ll\ \infty$$

となる。よって、補題 3.57 が示された。

２つの Poincaré 級数のうち、$P_m(\ \cdot, s_1\ )$ を展開して計算する。命題 3.1 より、$\mathrm{Re}\ s_1 > \frac{3}{2}$ のとき、

$$\langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ )\ \rangle$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \int_{\mathcal{F}} \left\{ y^{s_1} e^{-2\pi|m|y} \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} y^{2-s_1} \sum_{m_2 \in \mathbf{Z}[\omega]^*} e^{2\pi i[\ m_2,x\ ]} \sum_{0\neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-2s_1}\ S(\ m,m_2;l\ ) A_{s_1}(\ m,m_2;l;y\ ) \right\} \\
& \times \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^{s_2}(\ \gamma_1(z)\ ) e^{-2\pi|n|y(\ \gamma_1(z)\ ) - 2\pi i[\ n,x(\ \gamma_1(z)\ )\ ]}\ d\mu(z)\ .
\end{aligned}
$$

ここから先の計算を 2 つに分けて考える。定義 2.6、補題 3.13 と補題 3.57 より、

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{F}} y^{s_1} e^{-2\pi|m|y} \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i[\ m,\rho x\ ]} \\
& \times \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^{s_2}(\ \gamma_1(z)\ ) e^{-2\pi|n|y(\ \gamma_1(z)\ ) - 2\pi i[\ n,x(\ \gamma_1(z)\ )\ ]}\ d\mu(z) \\
= \quad & \int_{\Gamma_t \backslash \mathcal{H}^3} y^{s_1+s_2-3} e^{-2\pi(\ |m|+|n|\ )y} \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i\{\ [\ m,\rho x\ ] - [\ n,x\ ]\ \}}\ dx_1 dx_2 dy \\
= \quad & \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i\{\ [\ m,\rho x\ ] - [\ n,x\ ]\ \}}\ dx_1 dx_2 \\
& \times \int_0^\infty y^{s_1+s_2-3} e^{-2\pi(\ |m|+|n|\ )y}\ dy\ . \qquad (54)
\end{aligned}
$$

ここで、x についての積分を考える。

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\rho=1,\omega,\overline{\omega}} e^{2\pi i\{\ [\ m,\rho x\ ] - [\ n,x\ ]\ \}}\ dx_1 dx_2 \\
= \quad & \int_0^1 \int_0^1 \left\{\ e^{2\pi i[\ m-n,x\ ]} + e^{2\pi i\{\ [\ m,\omega x\ ] - [\ n,x\ ]\ \}} + e^{2\pi i\{\ [\ m,\overline{\omega} x\ ] - [\ n,x\ ]\ \}}\ \right\}\ dx_1 dx_2\ . \qquad (55)
\end{aligned}
$$

$m' := m - n = m'_1 + m'_2 i$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ m-n,x\ ]}\ dx_1 dx_2 \\
= \quad & \int_0^1 e^{2\pi m'_1 x_1}\ dx_1 \int_0^1 e^{2\pi i(\ -\frac{1}{2}m'_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}m'_2\ )x_2}\ dx_2\ . \qquad (56)
\end{aligned}
$$

式 (56) は、$m'_1 \neq 0$ のとき、(式 (56)) $= 0$ となるので、$m'_1 = 0$ のときを考える。同様に、$m'_2 \neq 0$ のとき、(式 (56)) $= 0$ となるので、$m'_2 = 0$ のときを考える。ゆえに、$m' = 0$ のとき、つまり、$m = n$ のときのみを考えることになる。よって、

$$
(\text{式 } (56)) = 1 \qquad (57)
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
[\ m, \omega x\ ] - [\ n, x\ ] &= [\ m\overline{\omega}, x\ ] - [\ n, x\ ] = [\ m\overline{\omega} - n, x\ ]\ , \\
[\ m, \overline{\omega} x\ ] - [\ n, x\ ] &= [\ m\omega, x\ ] - [\ n, x\ ] = [\ m\omega - n, x\ ]
\end{aligned}
$$

に注意して、式 (56) と同様に計算すると、$m\overline{\omega} = n$ のとき、つまり、$m = n\omega$ のとき、

$$
\int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ m, \omega x\ ] - [\ n, x\ ]}\ dx_1 dx_2 = 1 \tag{58}
$$

となる。$m\omega = n$ のとき、つまり、$m = n\overline{\omega}$ のとき、

$$
\int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[\ m, \overline{\omega} x\ ] - [\ n, x\ ]}\ dx_1 dx_2 = 1 \tag{59}
$$

となる。次に、y の積分を考える。$|\ m\ |=|\ n\ |=|\ n\omega\ |=|\ n\overline{\omega}\ |$ と式 (57)、式 (58) と式 (59) より、

$$
(\text{式 } (54)) = (\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) \int_0^\infty y^{s_1+s_2-3} e^{-4\pi|m|}\ dy
$$

となる。ここで、$Y := 4\pi\ |\ m\ |$ と変数変換すると、

$$
\begin{aligned}
(\text{式 } (54)) &= (\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) \frac{1}{(\ 4\pi\ |\ m\ |\ )^{s_1+s_2-2}} \int_0^\infty Y^{s_1+s_2-3} e^{-Y}\ dY \\
&= (\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) \Gamma(\ s_1 + s_2 - 2\ )(\ 4\pi\ |\ m\ |\ )^{2-s_1-s_2}\ . \qquad (60)
\end{aligned}
$$

次に、残りの部分を計算する。1 つの m_2 について考える。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}} \frac{1}{2} y^{2-s_1} e^{2\pi i[\ m_2, x\ ]} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-2s_1}\ S(\ m, m_2; l\ ) A_{s_1}(\ m, m_2; l; y\ ) \\
&\times \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_t \backslash \Gamma} y^{s_2}(\ \gamma_1(z)\ ) e^{-2\pi|n|y(\ \gamma_1(z)\ ) - 2\pi i[\ n, x(\ \gamma_1(z)\ )\ ]}\ d\mu(z)\ .
\end{aligned}
$$

についても先程と同様に、$m_2 = n$ のとき、

$$
\begin{aligned}
(\text{式 } (61)) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{s_2-s_1-1} e^{-2\pi|n|y} \\
&\quad \times \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-2s_1}\ S(\ m, n; l\ ) A_{s_1}(\ m, n; l; y\ )
\end{aligned}
$$

となる。式 (60) と式 (61) を用いて、まとめる。よって、命題 3.56 が示された。

変形後の式の存在を考える。

補題 3.58 命題 3.56 の右辺は、$\mathrm{Re}\ s_1, \mathrm{Re}\ s_2 > \frac{3}{2}$ のとき、絶対収束し、存在する。

証明 m と n を固定する。Re s_1, Re $s_2 > \frac{3}{2}$ より、$|s_1| \to \infty$ や $|s_2| \to \infty$ のときを考えればよい。Stirling の公式より、

$$\begin{aligned} & (\delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}})\Gamma(s_1 + s_2 - 2)(4\pi |m|)^{2-s_1-s_2} \\ \ll\ & O(e^{-|\mathrm{Im}(s_1+s_2)|}) < \infty \text{ となる。} \end{aligned}$$

残りの部分について、補題 3.8 より、和の部分は Re $s_1 > \frac{3}{2}$ のとき、絶対収束する。よって、残りの積分を考える。exponential factor が存在するので、

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2\pi|n|y} y^{s_2-s_1-1} \ll \int_0^\infty y^{-2}\, dy < \infty$$

となる。よって、補題 3.58 が示された。

$A_{s_1}(m,n;l;y)$ を変形し、更に変形し、内積を計算する。

命題 3.59 $0 \neq m, n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。$\frac{3}{2} <$ Re s_1, Re s_2 を満たす $s_1, s_2 \in \mathbf{C}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \langle P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2}) \rangle \\ = & (\delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}})\Gamma(s_1 + s_2 - 2)(4\pi |m|)^{2-s_1-s_2} \\ & + \pi\left(\frac{|m|}{|n|}\right)^{\frac{1}{2}(s_2-s_1)} \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} |l|^{-s_1-s_2} S(m,n;l) B\left(\frac{2\pi\sqrt{|mn|}}{|l|}, \vartheta_0; s_1, s_2\right). \end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &:= \arg \varpi, \\ \varpi^2 &:= \frac{\overline{mn}}{l^2}, \\ B(p,\vartheta;s_1,s_2) &:= \int_0^\infty y^{s_2-s_1-1} C\left(p,\vartheta;\frac{1}{2}(s_1+s_2);y\right) dy, \\ C(p,\vartheta;\tau;y) &:= \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+1)^\tau} J_0\left(\frac{pr}{\sqrt{r^2+1}}\left|ye^{i\vartheta} + (ye^{i\vartheta})^{-1}\right|\right) e^{-\frac{p(y+y^{-1})}{\sqrt{r^2+1}}}\, dr. \end{aligned}$$

証明 まず、

$$\int_0^\infty y^{s_2-s_1-1} e^{-2\pi|m|y} \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} |l|^{-2s_1} S(m,n;l) A_{s_1}(m,n;l;y)\, dy \quad (61)$$

を変形する。先程の $A_{s_1}(m,n;l;y)$ の変形の一部分に着目して、変形する。

$$\begin{aligned} & \left|ny + \frac{\overline{m}}{l^2(r^2++1)y}\right|^2 \\ = & |n|^2 y^2 + \frac{|m|^2}{|l|^4(r^2+1)^2 y^2} + \frac{2}{|l|^4(r^2+1)^2} \mathrm{Re}\ \overline{mn}(\overline{l})^2 \ .(62) \end{aligned}$$

ここで、$y \to \frac{1}{|l|\sqrt{r^2+1}}\sqrt{\frac{|m|}{|n|}}Y$ と変数変換すると、

$$
\begin{aligned}
(\text{式 }(62)) &= \frac{|\,mn\,|}{|\,l\,|^2}\cdot\frac{1}{r^2+1}\left(\ Y^2+Y^{-2}+\frac{2}{|\,l\,|^2|\,m\,||\,n\,|}\mathrm{Re}\ \overline{mn}(\bar{l})^2\ \right)\\
&= \frac{|\,mn\,|}{|\,l\,|^2}\cdot\frac{1}{r^2+1}\left(\ Y^2+Y^{-2}+2\frac{|\,l\,|^2}{|\,mn\,|}\mathrm{Re}\ \frac{\overline{mn}}{l^2}\ \right)\ . \qquad (63)
\end{aligned}
$$

$|\,l^2\,|=|\,l\,|^2$ に注意すると、

$$
\begin{aligned}
2\frac{|\,l\,|^2}{|\,mn\,|}\mathrm{Re}\ \frac{\overline{mn}}{l^2} &= \frac{|\,l\,|^2}{|\,mn\,|}\left(\ \frac{\overline{mn}}{l^2}-\overline{\frac{\overline{mn}}{l^2}}\ \right)\ ,\\
\left|\frac{\overline{mn}}{l^2}\right| &= \frac{|\,\overline{m}\,||\,\overline{n}\,|}{|\,l\,|^2}\ ,\\
\frac{|\,l\,|^2}{|\,mn\,|}\cdot\frac{\overline{mn}}{l^2} &= e^{i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}\ ,\\
\frac{|\,l\,|^2}{|\,mn\,|}\cdot\overline{\frac{\overline{mn}}{l^2}} &= e^{-i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}
\end{aligned}
$$

となる。そこで、$\vartheta_0 := \frac{1}{2}\arg\frac{\overline{mn}}{l^2}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
& Y^2+Y^{-2}+2\frac{|\,l\,|^2}{|\,mn\,|}\mathrm{Re}\ \frac{\overline{mn}}{l^2}\\
=\ & Y^2+Y^{-2}+\frac{e^{\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}}{e^{-\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}}+\frac{e^{-\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}}{e^{\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}}\\
=\ & \left\{(\ Ye^{\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}\ )+(\ Ye^{\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}\ )^{-1}\right\}\left\{(\ Ye^{-\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}\ )+(\ Ye^{-\frac{1}{2}i\arg\frac{|\overline{mn}|}{|l|^2}}\ )^{-1}\right\}\\
=\ & \left|(\ Ye^{i\vartheta_0}\ )+(\ Ye^{i\vartheta_0}\ )^{-1}\right|^2 .
\end{aligned}
$$

よって、

$$
(\text{式 }(63)) = \frac{|\,mn\,|}{|\,l\,|^2}\cdot\frac{1}{r^2+1}\left|(\ Ye^{i\vartheta_0}\ )+(\ Ye^{i\vartheta_0}\ )^{-1}\right|^2 \qquad (64)
$$

となる。式 (64) を補題 3.55 に代入する。

$$
\begin{aligned}
& A_{s_1}(\ m,n;l;\frac{1}{|\,l\,|\sqrt{r^2+1}}\sqrt{\frac{|\,m\,|}{|\,n\,|}}Y\ )\\
=\ & 2\pi\int_0^\infty \frac{r}{(\ r^2+1\ )^s}\\
& \times J_0\left(\ \frac{2\pi\sqrt{|\,mn\,|}}{|\,l\,|}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}\cdot r\left|(\ Ye^{i\vartheta_0}\ )+(\ Ye^{i\vartheta_0}\ )^{-1}\right|\ \right)e^{-\frac{2\pi\sqrt{|mn|}}{|l|}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}\cdot\frac{1}{Y}}\ dr\ .
\end{aligned}
$$

(65)

補題 3.55、命題 3.56 と補題 3.58 に注意して、式 (65) を式 (61) に代入する。
$p := \frac{2\pi\sqrt{|mn|}}{|l|}$ とおく。

$$
\begin{aligned}
(\text{式 }(61)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{1}{|\,l\,|\sqrt{r^2+1}} \sqrt{\frac{|\,m\,|}{|\,n\,|}} Y \right)^{s_2-s_1-1} e^{-\frac{2\pi\sqrt{|mn|}}{|l|}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}\cdot Y} \\
&\quad \times 2\pi \frac{r}{(\,r^2+1\,)^{s_1}} J_0\left(\frac{2\pi\sqrt{|\,mn\,|}}{|\,l\,|} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \cdot r \left| (\,Ye^{i\vartheta_0}\,) + (\,Ye^{i\vartheta_0}\,)^{-1} \right| \right) \\
&\quad \times e^{-\frac{2\pi\sqrt{|mn|}}{|l|}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}\cdot\frac{1}{Y}} \frac{1}{|\,l\,|\sqrt{r^2+1}} \sqrt{\frac{|\,m\,|}{|\,n\,|}}\, drdY \\
&= 2\pi \,|\,l\,|^{s_1-s_2} \left(\frac{|\,m\,|}{|\,n\,|} \right)^{\frac{s_2-s_1}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r}{(\,r^2+1\,)^{\frac{s_1+s_2}{2}}} Y^{s_2-s_1-1} \\
&\quad \times J_0\left(\frac{pr}{\sqrt{r^2+1}} \left| (\,Ye^{i\vartheta_0}\,) + (\,Ye^{i\vartheta_0}\,)^{-1} \right| \right) e^{-\frac{p}{\sqrt{r^2+1}}(\,Y+\frac{1}{Y}\,)}\, drdY \\
&= 2\pi \,|\,l\,|^{s_1-s_2} \left(\frac{|\,m\,|}{|\,n\,|} \right)^{\frac{s_2-s_1}{2}} \int_0^\infty Y^{s_2-s_1-1} C(\,p,\vartheta_0; \frac{s_1+s_2}{2}; Y\,)\, dY \\
&= 2\pi \,|\,l\,|^{s_1-s_2} \left(\frac{|\,m\,|}{|\,n\,|} \right)^{\frac{s_2-s_1}{2}} B(\,p,\vartheta_0; s_1, s_2\,)\,. \qquad (66)
\end{aligned}
$$

式 (66) を命題 3.56 に代入する。よって、命題 3.59 が示された。

以後の式変形の条件となる場合があるので、ここで述べる。

補題 3.60 $\sin\vartheta_0, \cos\vartheta_0 > 0$ としてよい。

証明

$$\arg \frac{\overline{mn}}{l^2} = \frac{1}{|\,l\,|^4} \arg \overline{mn}\overline{l^2}$$

である。$l \in \mathbf{Z}[\omega]$ なので、同一視できるイデアルを考えれば、

$$0 \ < \ \arg \frac{\overline{mn}}{l^2} \ \leq \ \frac{\pi}{3}$$

となる l が存在する。よって、補題 3.60 が示された。

$B(\,p,\vartheta,s_1,s_2\,)$ について考える。

補題 3.61 $\mathrm{Re}\ s_1, \mathrm{Re}\ s_2 > 1$ のとき、

$$B(\,p,\vartheta,s_1,s_2\,) \ll |\,l\,|^{|\mathrm{Re}\ s_1 - \mathrm{Re}\ s_2|} \quad .$$

証明　補題 3.62 [数学公式　, p.179]
$\mathrm{Re}\ \nu > -\frac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Re}\ z > 0$ のとき、

$$J_\nu(z) = \frac{(\,\frac{z}{2}\,)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\,\nu+\frac{1}{2}\,)} \int_0^\pi \cos(\,z\cos\theta\,)(\,\sin\theta\,)^{2\nu}\, d\theta\,.$$

補題 3.62 の条件を満たすので、

$$\begin{aligned}
&\left| J_0 \left(\frac{pr}{\sqrt{r^2+1}} \left| (\ Ye^{i\vartheta_0} \ ) + (\ Ye^{i\vartheta_0} \ )^{-1} \right| \right) \right| \\
\leq \ & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} | \cos(\ z \cos\theta \ ) | \ \ d\theta = 1 \ . \qquad (67)
\end{aligned}$$

$B(\ p, \vartheta, s_1, s_2 \ )$ の絶対収束を示し、式変形をしていく。

補題 3.63 $B(\ p, \vartheta, s_1, s_2 \ )$ の積分の順序を交換できる。

証明 式 (67) と exponential factor があることとその factor の中身に注意すると、

$$\begin{aligned}
&\left| B(\ p, \vartheta, s_1, s_2 \ ) \right| \\
\leq \ & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\sqrt{r^2+1}}(\ y + \frac{1}{y} \ )} y^{\mathrm{Re} \ \ s_2 - \mathrm{Re} \ \ s_1 - 1} \frac{r}{(\ r^2+1 \ )^{\frac{\mathrm{Re} \ \ s_1 + \mathrm{Re} \ \ s_2}{2}}} \\
& \times \left| J_0 \left(\frac{pr}{\sqrt{r^2+1}} \left| (\ Ye^{i\vartheta_0} \ ) + (\ Ye^{i\vartheta_0} \ )^{-1} \right| \right) \right| \ drdy \\
\ll \ & \int_0^{\infty} y^{-2} \ dy \int_0^{\infty} \frac{r}{(\ r^2+1 \ )^{\frac{\mathrm{Re} \ \ s_1 + \mathrm{Re} \ \ s_2}{2}}} \ dr \ . \qquad (68)
\end{aligned}$$

$\mathrm{Re} \ \ s_1 + s_2 > 2$ のとき、 (式 (68)) $< \infty$ となる。s_1 と s_2 の条件はこれを満たす。よって、補題 3.63 が示された。

$B(\ p, \vartheta, s_1, s_2 \ )$ の挙動を考える。

補題 3.64 [Erdélyi etc., p.82 (23)]
$\mathrm{Re} \ \ z > 0, \mathrm{Re} \ (\ a^2 z \ ) > 0$ のとき、

$$K_\nu(\ az \ ) = \frac{1}{2} a^\nu \int_0^{\infty} t^{-\nu-1} e^{-\frac{1}{2}z(\ t + a^2 t^{-1} \ )} \ dt \ .$$

$a = 1$ かつ $z = \frac{2p}{\sqrt{r^2+1}}$ かつ $\nu = \mathrm{Re} \ \ s_1 - \mathrm{Re} \ \ s_2$ とおく。$p > 0$ に注意すると、これらは、補題 3.64 の条件を満たす。補題 3.63 と補題 3.64 より、

$$\begin{aligned}
&\left| B(\ p, \vartheta, s_1, s_2 \ ) \right| \\
\leq \ & 2 \int_0^{\infty} \frac{r}{(\ r^2+1 \ )^{\frac{\mathrm{Re} \ \ s_1 + \mathrm{Re} \ \ s_2}{2}}} K_{\mathrm{Re} \ \ s_1 - \mathrm{Re} \ \ s_2} \left(\frac{2p}{\sqrt{r^2+1}} \right) \ dr \ . \qquad (69)
\end{aligned}$$

$$\left| K_{\mathrm{Re} \ \ s_1 - \mathrm{Re} \ \ s_2} \left(\frac{2p}{\sqrt{r^2+1}} \right) \right| = K_{\mathrm{Re} \ \ s_1 - \mathrm{Re} \ \ s_2} \left(\frac{2p}{\sqrt{r^2+1}} \right) \ . \qquad (70)$$

Bessel 関数の公式を用いて、$B(\ p, \vartheta, s_1, s_2 \ )$ の挙動を見る。

補題 3.65 [Erdélyi etc., p.5 (12)]
$-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$I_\nu = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(\ iz \ ) \ .$$

補題 3.48 の条件を満たすので、

$$\begin{aligned} \left| K_\nu(z) \right| &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{|\sin(\ \pi\nu\ )|} \left| I_{-\nu}(z) - I_\nu(z) \right| \\ &\ll \frac{\pi}{2} \left\{ \ \left| I_{-\nu}(z) \right| + \left| I_\nu(z) \right| \ \right\} \ . \end{aligned} \tag{71}$$

補題 3.65 の条件を満たすので、

$$\left| I_\nu(z) \right| = \left| e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \right| \left| J_\nu(\ iz\ ) \right| = \left| J_\nu(\ iz\ ) \right|$$

となる。そこで、J-Bessel 関数の公式を用いる。

補題 3.66 [Watson, p.44 3.13 (1)]

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2} \right)}{\Gamma(\ \nu+1\ )} (\ 1+a\ )\ ,$$

但し、$|\ z\ |$ と $|\ \nu\ |$ が上に有界であり、

$$\begin{aligned} |\ a\ | &:= e^{\left\{ \frac{\frac{1}{4}|z|^2}{|\nu_0+1|} \right\}} \\ |\ \nu_0+1\ | &:= \min\{|\ \nu+1\ |\} \end{aligned}$$

とする。

m、n、s_1 と s_2 を固定する。このとき、補題 3.66 の条件を満たすので、

$$(\text{式 } (71)) = |\ z\ |^\nu \tag{72}$$

となる。式 (72) を式 (69) に代入する。式 (70) に注意し、$\frac{2p}{\sqrt{r^2+1}} \to R$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned} (\text{式 } (69)) &\ll \frac{|\ l\ |}{2\pi\sqrt{|\ mn\ |}} \int_0^{\frac{4\pi\sqrt{|mn|}}{|l|}} \left(R^{\mathrm{Re}\ (\ s_1-s_2\ )} + R^{\mathrm{Re}\ (\ s_2-s_1\ )} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{4\pi\sqrt{|\ mn\ |}}{|\ l\ |} \cdot \frac{1}{R} \right)^{3-\mathrm{Re}\ (\ s_1+s_2\ )} dR \\ &\ll |\ l\ |^{\mathrm{Re}\ (\ s_1+s_2\ )-2} \int_0^{\frac{4\pi\sqrt{|mn|}}{|l|}} \left(R^{2\,\mathrm{Re}\ s_1-3} + R^{2\,\mathrm{Re}\ s_2-3} \right) dR \\ &\ll |\ l\ |^{\mathrm{Re}\ (\ s_1+s_2\ )-2} \left(|\ l\ |^{2-2\,\mathrm{Re}\ s_1} + |\ l\ |^{2-2\,\mathrm{Re}\ s_1} \right) . \end{aligned}$$

$|\ l\ | \geq 1$ より、$\mathrm{Re}\ s_1 \geq \mathrm{Re}\ s_2$ のとき、

$$|\ l\ |^{2-2\,\mathrm{Re}\,s_1} \leq |\ l\ |^{2-2\,\mathrm{Re}\,s_2}$$

となり、$\mathrm{Re}\ s_1 < \mathrm{Re}\ s_2$ のとき、

$$|\ l\ |^{2-2\,\mathrm{Re}\,s_1} > |\ l\ |^{2-2\,\mathrm{Re}\,s_2}$$

となる。これらをまとめる。よって、補題 3.61 が示された。

補題 3.61 を使って、式変形後の式の存在を示す。

補題 3.67

$$\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\left|\,|\,l\,|^{-s_1-s_2}\ S(\ m,n;l\ )B\left(\ \frac{2\pi\sqrt{|\ mn\ |}}{|\ l\ |},\vartheta_0;s_1,s_2\ \right)\right|\ <\ \infty \quad (73)$$

証明　m と n を固定し、$\mathrm{Re}\ s_1\ <\ \mathrm{Re}\ s_2$ とおく。補題 3.6、補題 3.7 と補題 3.61 より、

$$\begin{aligned}(\text{式 }(73)) &\leq \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}|\ l\ |^{-\mathrm{Re}\ s_1-\mathrm{Re}\ s_2}|\ l\ ||\ (\ l,m,n\ )\ |\ \sigma_0(l)\ |\ l\ |^{|\mathrm{Re}\ s_1-\mathrm{Re}\ s_2|}\\ &\ll \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}|\ l\ |^{1-2\,\mathrm{Re}\ s_1+2\varepsilon}\\ &\leq 6+\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}r^{2-2\,\mathrm{Re}\ s_1+2\varepsilon}\ drd\theta\ ,\end{aligned}$$

$3-2\,\mathrm{Re}\ s_1+2\varepsilon<0$ のとき、つまり、$\mathrm{Re}\ s_1>\frac{3}{2}$ のとき、

$$(\text{式 }(73))\ll\infty\ .$$

$\mathrm{Re}\ s_1\geq\mathrm{Re}\ s_2$ のときも同様に計算する。よって、補題 3.67 が示された。

補題 3.68　命題 3.59 の右辺は、$\mathrm{Re}\ s_1,\mathrm{Re}\ s_2>\frac{3}{2}$ のとき、絶対収束し、存在する。

証明　補題 3.58 より、補題 3.67 を示せばよい。よって、補題 3.68 が示された。

さらに、$B(\ p,\vartheta,s_1,s_2\ )$ を変形する。

補題 3.69 [本橋 1 , p.276-281]
$1<\mathrm{Re}\ s_1,\mathrm{Re}\ s_2$、$0<p$ かつ $0<\sin\vartheta,\cos\vartheta$ のとき、

$$B(\ p,\vartheta;s_1,s_2\ )\ =\ -i\frac{(\ 2p\ )^{2-s_1-s_2}}{\Gamma(\ s_1-\frac{1}{2}\ )\Gamma(\ s_2-\frac{1}{2}\ )}\int_{(0)}\lambda\Lambda(\ s_1,s_2;\lambda\ )\mathcal{J}_\lambda(\ pe^{i\vartheta}\ )\ d\lambda\ .$$

但し、$a\in\mathbf{R}$ かつ $t,\nu\in\mathbf{C}$ のとき、

$$\int_{(a)}\cdots\ d\lambda:=\int_{\mathrm{Re}\ \lambda=a}\cdots\ d\lambda$$

とおく。

命題 3.70 $0 \neq m,n \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。$s_1, s_2 \in \mathbf{C}$ で、$\frac{3}{2} <$ Re s_1 かつ $\frac{3}{2} <$ Re s_2 を満たすとする。このとき、

$$\begin{aligned}
& \langle\ P_m(\ \cdot, s_1\ ), P_n(\ \cdot, \overline{s_2}\ )\ \rangle \\
= & \ (\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ )\Gamma(\ s_1 + s_2 - 2\ )(\ 4\pi \mid m \mid)^{2-s_1-s_2} \\
& -i\frac{(\ 4\pi\ )^{3-s_1-s_2} \mid m \mid^{1-s_1} \mid n \mid^{1-s_2}}{4\Gamma(\ s_1 - \frac{1}{2}\ )\Gamma(\ s_2 - \frac{1}{2}\ )} \\
& \times \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \mid l \mid^{-2} S(\ m,n;l\ ) \int_{(0)} \lambda\Lambda(\ s_1, s_2; \lambda\ )\mathcal{J}_\lambda(\ 2\pi\varpi\ )\ d\lambda\ .
\end{aligned}$$

証明

$$\arg\varpi = \arg\sqrt{\frac{\overline{mn}}{l^2}}$$

と、

$$e^{i\arg\sqrt{\frac{\overline{mn}}{l^2}}} = \frac{\mid l \mid}{\sqrt{\mid mn \mid}}\sqrt{\frac{\overline{mn}}{l^2}}$$

から、$\vartheta_0 = \arg\varpi$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi\sqrt{\mid mn \mid}}{\mid l \mid}e^{i\vartheta_0} &= \frac{2\pi\sqrt{\mid mn \mid}}{\mid l \mid}\frac{\mid l \mid}{\sqrt{\mid mn \mid}}\sqrt{\frac{\overline{mn}}{l^2}} \\
&= 2\pi\varpi\ . \qquad (74)
\end{aligned}$$

後は、命題 3.59 に補題 3.69 と式 (74) を代入する。よって、命題 3.70 が示された。

これから、Δ の固有関数の Fourier 係数の挙動を 2 本の内積の式を用いて考える。

補題 3.71 [本橋 1 , p.275-282]
$0 < p$ かつ σ を $0 < \sigma$ を満たす小さい実数とする。$s_1, s_2 \in \mathbf{C}$ を $\mid$ Re $(\ s_1 - s_2\ ) \mid < \sigma$ かつ $\mid$ Re $(\ s_1 + s_2\ ) \mid > 2 + 4\sigma$ を満たすようにとる。さらに、$0 < \sin\vartheta, \cos\vartheta$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
B(\ p, \vartheta; s_1, s_s\ ) &= \frac{\Gamma\left(\ \frac{1}{2}(\ s_1 + s_2 - 1\ )\ \right)}{8\pi^{\frac{3}{2}}i} \\
&\times \int_0^1 \int_0^1 r^{\frac{1}{2}(\ s_1 - s_2\ ) - 1}(\ 1 - r\ )^{\frac{1}{2}(\ s_2 - s_1\ ) - 1} t'^{-\frac{1}{2}}(\ 1 - t'\ )^{\frac{1}{2}(\ s_1 + s_2\ ) - 2} \\
&\times \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma\left(\ \frac{1}{2}(\ s_1 + s_2\ ) - \eta\ \right)} \left(\ \frac{4p^{-2} r(\ 1 - r\ ) t'}{1 - 4(\sin\vartheta)^2 r(\ 1 - r\ ) t'}\ \right)^\eta d\eta dr dt'\ .
\end{aligned}$$

求めた内積の式に値を代入して、１本目の式を出す。

補題 3.72

$$
\begin{aligned}
& \langle\ P_m(\ \cdot, 2+it\ ), P_m(\ \cdot, \overline{2-it}\ )\ \rangle \\
= \quad & (\ 4\pi \mid m \mid\ )^{-2} + \frac{1}{16} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \mid l \mid^{-4} S(\ m, m; l\ )\Phi(\ t; m, l\ )\ .
\end{aligned}
$$

但し、

$$
\begin{aligned}
\Phi(\ t; m, l\ ) \quad := \quad & -i \int_0^1 \int_0^1 r^{it-1}(\ 1-r\ )^{-it-1} t'^{-\frac{1}{2}} \\
& \times \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\ 2-\eta\ )} \left(\frac{\mid l \mid^2 r(\ 1-r\ )t'}{(\ \pi \mid m \mid\ )^2 (\ 1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1-r\ )t'\ )} \right)^{\eta} d\eta dr dt'\ .
\end{aligned}
$$

証明　$s_1 = 2+it$、$s_2 = 2-it$、$m = n$ と $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ とする。このとき、補題 3.71 の条件を満たす。補題 3.71 にこれらを代入すると、

$$
B(\ \frac{2\pi\sqrt{\mid mn \mid}}{\mid l \mid}, \vartheta_0; s_1, s_2\ ) = \frac{1}{16\pi}\Phi(\ t; m, l\ )\ . \tag{75}
$$

条件と式 (75) を命題 3.59 に代入する。よって、補題 3.72 が示された。

もう 1 本の式を、別の内積の式に値を代入して求める。

補題 3.73

$$
\begin{aligned}
& \langle\ P_m(\ \cdot, 2+it\ ), P_m(\ \cdot, \overline{2-it}\ )\ \rangle \\
= \quad & \frac{\pi}{(\ 4\pi \mid m \mid\ )^2} \frac{1}{\left| \Gamma(\ \frac{3}{2}+it\ ) \right|^2} \\
& \times \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mid \rho_j(m) \mid^2 \Lambda(\ 2+it, 2-it; i\kappa_j\ ) \right. \\
& \left. +\ \ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mid \sigma'_{ir}(m) \mid^2}{\left| \Gamma(\ 1+ir\ )\zeta_K(\ 1+ir\ ) \right|^2} \Lambda(\ 2+it, 2-it; ir\ )\ dr \right\} \\
= \quad & \frac{\pi}{(\ 4\pi \mid m \mid\ )^2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mid \rho_j(m) \mid^2 \Psi(\ t, \kappa_j\ ) \right. \\
& \left. + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mid \sigma'_{ir}(m) \mid^2}{\left| \Gamma(\ 1+ir\ )\zeta_K(\ 1+ir\ ) \right|^2} \Psi(\ t, r\ )\ dr \right\}\ .
\end{aligned}
$$

但し、

$$
\Psi(\ t, r\ ) := \frac{\pi}{\left| \Gamma(\ \frac{3}{2}+it\ ) \right|^2} \Lambda(\ 2+it, 2-it; ir\ )
$$

とする。

証明　$s_1 = 2+it$、$s_2 = 2-it$ と $m=n$ とする。このとき、命題 3.44 の条件を満たす。命題 3.44 にこれらを代入する。よって、補題 3.73 が示された。

これらで等式を求める。

補題 3.74

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} \mid \rho_j(m) \mid^2 \Psi(\ t, \kappa_j\ ) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mid \sigma'_{ir}(m) \mid^2}{\left| \Gamma(\ 1+ir\ )\zeta_K(\ 1+ir\ ) \right|^2} \Psi(\ t, r\ )\ dr \\ = \quad & 1 + (\ \pi \mid m \mid\ )^2 \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \mid l \mid^{-4} S(\ m, m; l\ ) \Phi(\ t; m, l\ )\ . \end{aligned}$$

証明　補題 3.72 と補題 3.73 の両辺を比較して、まとめる。よって、補題 3.74 が示された。

補題 3.74 を用いて、$\mid \rho_j(m) \mid^2$ の挙動を考える。まず、その準備をする。$0 < K$ かつ K は十分大きいとする。

補題 3.75　条件を満たす $\forall t, \forall \kappa_j$ に対して、$\Psi(\ t, \kappa_j\ ) \geq 0$ となる。

証明

$$\Lambda(\ 2+it, 2-it, i\kappa_j\ ) = \left| \Gamma(\ 1+i(\ t+\kappa_j\ )\ ) \right|^2 \left| \Gamma(\ 1+i(\ t-\kappa_j\ )\ ) \right|^2 \ \geq\ 0$$

より、

$$\Psi(\ t, \kappa_j\ ) = \pi \left| \Gamma(\ \frac{3}{2} + it\ ) \right|^{-2} \Lambda(\ 2+it, 2-it, i\kappa_j\ )\ \geq\ 0$$

よって、補題 3.75 が示された。

補題 3.76

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{1-r} \right)^{it} \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right)\ dt = \sqrt{\pi} Q(\ r, K\ )\ .$$

但し、

$$Q(\ r, K\ ) \quad := \quad K \exp\left(-\left(\frac{K}{2} \log \frac{r}{1-r} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \exp\left(-\left(\frac{K}{4} \log \frac{r}{1-r} \right)^2 \right)\ .$$

証明

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{1-r} \right)^{it} \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right)\ dt \\ = \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2 + it \log \frac{r}{1-r}}\ dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2 + it \log \frac{r}{1-r}}\ dt \qquad (76) \end{aligned}$$

となるから、2 つに分けて計算する。$T_1=\frac{t}{K}$ かつ $T_2=T_1-\frac{i}{2}K\log\frac{r}{1-r}$ とおく。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2+it\log\frac{r}{1-r}}\ dt &= K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-T_1^2+iKT_1\log\frac{r}{1-r}}\ dT_1 \\ &= K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\ T_1-\frac{i}{2}K\log\frac{r}{1-r}\ \right)^2-\left(\ \frac{1}{2}K\log\frac{r}{1-r}\ \right)^2}\ dT_1 \\ &= K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-T_2^2}e^{-\left(\ \frac{1}{2}K\log\frac{r}{1-r}\ \right)^2}\ dT_2 \\ &= Ke^{-\left(\ \frac{1}{2}K\log\frac{r}{1-r}\ \right)^2}\sqrt{\pi}. \end{aligned} \tag{77}$$

同様に、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2+it\log\frac{r}{1-r}}\ dt=\frac{K}{2}e^{-\left(\ \frac{1}{4}K\log\frac{r}{1-r}\ \right)^2}\sqrt{\pi}\ . \tag{78}$$

式 (77) と式 (78) を式 (76) に代入する。よって、補題 3.76 が示された。

補題 3.77 $0\neq m\in\mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\ t;m,l\ )\left(\ e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2}-e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}\ \right)\ dt=2\pi^{\frac{3}{2}}P(\ m,l;K\ )\ .$$

但し、

$$\begin{aligned}P(\ m,l;K\ ) &:= \int_0^1\int_0^1\frac{t'^{-\frac{1}{2}}Q(\ r,K\ )}{r(\ 1-r\ )} \\ &\quad\times J_1^*\left(\ \frac{2\pi\mid m\mid}{\mid l\mid}\left(\ \frac{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2r(\ 1-r\ )t'}{r(\ 1-r\ )t'}\ \right)^{\frac{1}{2}}\ \right)\ drdt'\ .\end{aligned}$$

証明 計算において、絶対収束の仮定を続ける。

$$-i\int_{(\sigma)}\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\ 2-\eta\ )}\left(\ \frac{\mid l\mid^2\ r(\ 1-r\ )t'}{(\ \pi\mid m\mid\ )^2\ (\ 1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2r(\ 1-r\ )t'\ )}\ \right)^{\eta} \tag{79}$$

を変形していく。

補題 3.78 [本橋 1 , p.272 (2.14)]
$x>0$ かつ $-\mathrm{Re}\ \nu<2\alpha<0$ とする。

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\left(\ \frac{x}{2}\ \right)^{-2\eta}\frac{\Gamma(\ \frac{1}{2}\nu+\eta\ )}{\Gamma(\ 1+\frac{1}{2}\nu-\eta\ )}\ d\eta\ .$$

式 (3.78) の条件を満たすかを考える。$\eta'=\eta-\frac{1}{2}$ かつ $\nu=1$ とする。r と t' の範囲から、

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2r(\ 1-r\ )t'}{r(\ 1-r\ )t'}} &= \sqrt{\frac{1}{r(\ 1-r\ )t'}-4(\ \sin\vartheta_0\ )^2} \\ &< \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}}-4(\ \sin\vartheta_0\ )^2} \\ &= 2\cos\vartheta_0\ . \end{aligned} \tag{80}$$

補題 3.60 より、(式 (80)) > 0 となる。$\frac{\pi|m|}{|l|} > 0$ より、

$$\frac{\pi \mid m \mid}{\mid l \mid}\sqrt{\frac{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1-r\ )t'}{r(\ 1-r\ )t'}}\ >\ 0$$

となる。また、$0 < \sigma < \frac{1}{2}$ であったから、式 (3.78) の条件を満たす。よって、

$$\begin{aligned}
(\text{式 }(79)) &= \int_{(\ \sigma-\frac{1}{2}\ )} \frac{\Gamma(\ \frac{1}{2}\nu+\eta'\ )}{\Gamma(\ 1+\frac{1}{2}\nu-\eta'\ )}\left(\frac{\pi \mid m \mid}{\mid l \mid}\sqrt{\frac{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1-r\ )t'}{r(\ 1-r\ )t'}}\right)^{-2(\ \eta'+\frac{1}{2}\ )} d\eta' \\
&= 2\pi i\frac{\mid l \mid}{\pi \mid m \mid}\sqrt{\frac{r(\ 1-r\ )t'}{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1-r\ )t'}} \\
&\quad \times J_1\left(\frac{2\pi \mid m \mid}{\mid l \mid}\left(\frac{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1-r\ )t'}{r(\ 1-r\ )t'}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2\pi i J_1^*\left(\frac{2\pi \mid m \mid}{\mid l \mid}\left(\frac{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1-r\ )t'}{r(\ 1-r\ )t'}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (81)
\end{aligned}$$

式 (81) と補題 3.76 を用いて、まとめる。よって、補題 3.77 が示された。

補題 3.79

$$\begin{aligned}
\sum_{\frac{1}{2}K \le \kappa_j \le K} \mid \rho_j(m) \mid^2 e^{-\pi\kappa_j} \quad &\ll \quad K^2 + K \mid m \mid^2 \\
&\quad \times \sum_{0 \ne l \in \mathbf{Z}[\omega]} \mid l \mid^{-4} \left| S(\ m,m;l\ )\right|\left| P(\ m,l;K\ )\right|.
\end{aligned}$$

証明 以下の計算において、絶対収束を仮定する。$0 < K$ かつ十分大きいとする。補題 3.74 の両辺に $e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}(\ \ge 0\ )$ を掛けて、$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\ dt$ を行うと、

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mid \rho_j(m) \mid^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\ t,\kappa_j\ )\left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}\right) dt} \\
+ \quad &\underbrace{2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mid \sigma'_{ir}(m) \mid^2}{\left|\Gamma(\ 1+ir\ )\zeta_K(\ 1+ir\ )\right|^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\ t,r\ )\left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}\right) dt} \\
= \quad &\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}\right) dt} \\
+ \quad &\underbrace{(\ \pi \mid m \mid\ )^2 \sum_{0 \ne l \in \mathbf{Z}[\omega]} \mid l \mid^{-4} S(\ m,m;l\ )\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\ t;m,l\ )\left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}\right) dt}
\end{aligned}$$

となる。補題 3.75 と同様に、$\Psi(\ t, r\ ) \geq 0$ となる。よって、 ≥ 0 かつ ≥ 0 となり、 $\leq$ $+$ となる。また、 について、$t = KT$ と変数変換すると、

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-T^2} - e^{-4T^2} \right) K\ dT \\
&= K \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-T^2}\ dT - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-T^2}\ dT \right\} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} K
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} |\ \rho_j(m)\ |^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\ t, \kappa_j\ ) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right)\ dt \\
\leq\ & \frac{\sqrt{\pi}}{2} K \\
+\ & (\ \pi\ |\ m\ |\ )^2 \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-4}\ S(\ m, m; l\ ) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\ t; m, l\ ) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right)\ dt\ .
\end{aligned}
$$

式変形に関しては、

$$
\gg K^{-1} \sum_{\frac{K}{2} \leq \kappa_j < K} |\ \rho_j(m)\ |^2\ e^{-\pi \kappa_j}
$$

を示せばよい。 の無限和と積分を制限する。

$$
\gg \sum_{\frac{K}{2}\ \leq\ \kappa_j\ \leq\ K} |\ \rho_j(m)\ |^2 \int_{\frac{K}{2}}^{K} \Psi(\ t, \kappa_j\ ) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right)\ dt\ . \tag{82}
$$

$\frac{K}{2} \leq t \leq K$ のとき、

$$
0\ <\ e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}\ <\ e^{-\frac{1}{4}} - e^{-4}
$$

なので、

$$
M := \min_{\frac{K}{2} \leq t \leq K} e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2}
$$

とおくと、

$$
\int_{\frac{K}{2}}^{K} \Psi(\ t, \kappa_j\ ) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right)\ dt\ \geq\ M \int_{\frac{K}{2}}^{K} \Psi(\ t, \kappa_j\ )\ dt \tag{83}
$$

となる。残りの $\Psi(\ t, \kappa_j\ )$ について考える。

補題 3.80 [数学公式 , p.1]
$s \in \mathbf{C}$、$y \in \mathbf{R}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\ s+1\ ) &= s\Gamma(s)\ , \\
\Gamma(\ s+1\ )\Gamma(\ 1-s\ ) &= \frac{\pi}{\sin(\ \pi s\ )}\ , \\
\Gamma(\ s+\frac{1}{2}\ )\Gamma(\ \frac{1}{2}-s\ ) &= \frac{\pi}{\cos(\ \pi s\ )}\ .
\end{aligned}
$$

補題 3.81 [Churchill/Brown, p.52 (11),(12), p.54 (21)]
$y \in \mathbf{R}$ かつ $s \in \mathbf{C}$ とする。

$$\begin{aligned}
\sin(\ iy\ ) &= i\sinh(y)\ , \\
\cos(\ iy\ ) &= \cosh(y)\ , \\
|\cos(s)\ |^2 &= (\cos(\ \mathrm{Re}\ \ s\ ))^2 + (\sinh(\ \mathrm{Im}\ \ s\ ))^2\ , \\
\sinh(s) &= \frac{e^s - e^{-s}}{2}\ , \\
\cosh(s) &= \frac{e^s + e^{-s}}{2}\ .
\end{aligned}$$

3.80 と 3.81 より、

$$\begin{aligned}
\left|\Gamma(\ 1 + i(\ t + \kappa_j\ )\ )\right|^2 &= i(\ t + \kappa_j\ )\Gamma(\ i(\ t + \kappa_j\ )\ )\Gamma(\ 1 - i(\ t + \kappa_j\ )\ ) \\
&= \frac{\pi(\ t + \kappa_j\ )}{\sinh(\ \pi(\ t + \kappa_j\ )\ )}\ . \qquad (84)
\end{aligned}$$

$$\left|\Gamma(\ 1 + i(\ t - \kappa_j\ )\ )\right|^2 = \frac{\pi(\ t - \kappa_j\ )}{\sinh(\ \pi(\ t - \kappa_j\ )\ )}\ . \qquad (85)$$

$$\left|\Gamma(\ \frac{3}{2} + it\ )\right|^2 = \frac{\pi(\ t^2 + \frac{1}{4}\ )}{\cosh(\ \pi t\ )}\ . \qquad (86)$$

式 (83) に式 (84)、式 (85) と式 (86) を代入する。$t \geq \kappa_j$ のとき、

$$(\text{式 } (83)) \geq 2M\pi^2 \int_{\frac{K}{2}}^{K} \frac{t^2 - \kappa_j^2}{t^2 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{2\pi t} - e^{-2\pi\kappa_j} - e^{2\pi\kappa_j} + e^{-2\pi t}}\ dt\ . \qquad (87)$$

このうち、

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{2\pi t} - e^{-2\pi\kappa_j} - e^{2\pi\kappa_j} + e^{-2\pi t}} &\geq \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t}} \\
&\geq \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{(\ e^{\pi t} + e^{-\pi t}\ )^2} \\
&\geq \frac{1}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \\
&= (\ 2\cosh(\ \pi t\ )\ )^{-1}
\end{aligned}$$

であり、

$$M_1 := \min_{\frac{K}{2}\ \leq\ t\ \leq\ K} (\ 2\cosh(\ \pi t\ )\ )^{-1}$$

とする。K は十分大きいので、$1 \leq t$ としてよい。このとき、$1 \leq te^{\pi\frac{t}{2}}$ である。$\frac{K}{2} \leq t \leq K$ に注意して、

$$\begin{aligned}
(\text{式 } (87)) &\geq 2\pi^2 MM_1 \int_{\frac{K}{2}}^{K} \frac{t^2 - \kappa_j^2}{t^2 + \frac{1}{4}}\ dt \\
&\gg \int_{\frac{K}{2}}^{K} \frac{t^2 - \kappa_j^2}{t^3 + \frac{1}{4}t} \cdot e^{-\pi\frac{t}{2}}\ dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\gg \quad K^{-1}e^{-\pi\frac{K}{2}} \\
&\geq \quad K^{-1}e^{-\pi\kappa_j} \ .
\end{aligned}
$$

$t < \kappa_j$ のとき、

$$
(\text{式 }(83)) \geq 2M\pi^2 \int_{\frac{K}{2}}^{K} \frac{\kappa_j^2 - t^2}{t^2 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{-e^{2\pi t} + e^{-2\pi\kappa_j} + e^{2\pi\kappa_j} - e^{-2\pi t}} \ dt \ . \quad (88)
$$

このうち、

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{-e^{2\pi t} + e^{-2\pi\kappa_j} + e^{2\pi\kappa_j} - e^{-2\pi t}} \quad &\geq \quad \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{2\pi\kappa_j} + e^{-2\pi\kappa_j}} \\
&\geq \quad \frac{2}{(\ e^{\pi\kappa_j} + e^{-\pi\kappa_j}\ )^2}
\end{aligned}
$$

であり、

$$
M_2 := (\ \cosh(\ \pi\kappa_j\ )\ )^{-2}
$$

とおく。K は十分大きいので、$1 \leq t$ としてよい。このとき、$1 \leq te^{\pi\frac{t}{2}}$ である。$\frac{K}{2} \leq t \leq K$ に注意して、

$$
\begin{aligned}
(\text{式 }(88)) \quad &\geq \quad 4\pi^2 M M_2 \int_{\frac{K}{2}}^{K} \frac{t^2 - \kappa_j^2}{t^2 + \frac{1}{4}} \ dt \\
&\gg \quad \int_{\frac{K}{2}}^{K} \frac{t^2 - \kappa_j^2}{t^3 + \frac{1}{4}t} \cdot e^{-\pi\frac{t}{2}} \ dt \\
&\gg \quad K^{-1}e^{-\pi\frac{K}{2}} \\
&\geq \quad K^{-1}e^{-\pi\kappa_j} \ .
\end{aligned}
$$

よって、補題 3.79 の式変形は示された。そこで、補題 3.79 の右辺の存在を考える。

補題 3.82

$$
\sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-4} \left| S(\ m, m; l\ ) \right| \left| P(\ m, l; K\ ) \right| \ < \ \infty \ .
$$

証明 $P(\ m, l; K\ )$ について考える。

$$
u := \frac{2\pi \mid m \mid}{\mid l \mid} \left(\frac{1 - (\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1 - r\ )t'}{r(\ 1 - r\ )t'} \right)^{\frac{1}{2}}
$$

とおくと、補題 3.62 の条件を満たすので、

$$
\begin{aligned}
\left| J_1^*(u) \right| \quad &\leq \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(\ u\cos\theta\ )|| \ \sin\theta\ |^2 \ \ d\theta \\
&\leq \quad 2\ . \qquad (89)
\end{aligned}
$$

補題 3.83 [本橋 2 , p.54]

$$\int_0^1 \frac{Q(\ r, K\ )}{r(\ 1-r\ )}\ dr = 0\ .$$

式 (89) と補題 3.83 より、

$$\Big| P(\ m, l; K\ ) \Big| \le 2 \int_0^1 t'^{-\frac{1}{2}}\ dt' \ll \infty\ . \tag{90}$$

よって、補題 3.6、補題 3.7 と式 (90) より、

$$\begin{aligned} \sum_{0\neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-4} |\ l\ ||\ (\ l, m, n\ )\ |\ \sigma_0(l) &\ll \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} |\ l\ |^{-3+2\varepsilon} \\ &\le 6 + \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} r^{-2-2\varepsilon}\ dr \\ &< \infty\ . \end{aligned}$$

よって、補題 3.82 が示された。

後は、補題 3.79 の計算過程での絶対収束を示せばよい。

補題 3.84 補題 3.79 の式変形において、和と積分の順序は交換できる。

証明 以下の４つを示せばよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\frac{K}{2}\le\kappa_j\le K} |\ \rho_j(m)\ |^2\ \Psi(\ t, \kappa_j\ ) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right)\ dt\ <\ \infty\ . \tag{91}$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{|\ \sigma'_{ir}(m)\ |^2}{\Big| \Gamma(\ 1+ir\ )\zeta_K(\ 1+ir\ ) \Big|^2} \Psi(\ t, r\ ) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right) \right|\ dt\ <\ \infty\ . \tag{92}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right) \right|\ dt\ <\ \infty\ . \tag{93}$$

$$(\ \pi\ |\ m\ |\ )^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} \Big| |\ l\ |^{-4}\ S(\ m, m; l\ ) \Phi(\ t; m, l\ ) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right) \Big|\ dt\ <\ \infty\ . \tag{94}$$

K と m を固定する。式 (91) について考える。和は有限和なので、$|\ \rho_j(m)\ |^2$ の最大値を考える。$\Psi(\ t, \kappa_j\ )$ に関しては、分母に比べて、分子の Γ-factor の数が２つ多い。そこで、$|\ t\ |\to\infty$ のときは、Stirling の公式を用い、exponential factor に注意する。また、$|\ t\ |\to 0$ のときは、κ_j の式になり、有限である。よって、

$$(\text{式 (91) の左辺}) \ll \infty\ .$$

次に、式 (92) について考える。

補題 3.85 [Titchmarsh, p.97 Thm. 5.16]

$$\frac{1}{|\ \zeta_K(\ 1+it\ )\ |^2} \ll \left(\frac{\log t}{\log(\ \log t\ )} \right)^2 .$$

補題 3.86 [Titchmarsh, p.98 Thm. 5.17]

$$\left(\frac{\log t}{\log(\ \log t\ )} \right)^2 \ll \frac{1}{|\ \zeta_K(\ 1+it\ )\ |^2} .$$

式 (92) において、t と r のどちらに関しても、分母に比べて、分子の Γ-factor の数が 2 つ多く、補題 3.85 と補題 3.86 より、$\frac{1}{|\zeta_K(\ 1+ir\ )|^2}$ の部分は、Γ-factor よりも、強い影響を及ぼさない。そこで、$|\ t\ |\to\infty$ のとき、または、$|\ r\ |\to\infty$ のときは、Stirling の公式を用い、exponential factor に注意する。また、$|\ t\ |\to 0$ のとき、または $|\ r\ |\to 0$ のときは、

$$\int_0^1 \cdots\ drdt\ ,$$

で考えればよい。$|\ t\ |\to 0$ のときは、$e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \to 0$ かつ $\Psi(\ t, r\ ) < \infty$ により、t に関しては、有限となる。$|\ r\ |\to 0$ については、$\zeta_K(\ s\ )$ は、$s=1$ で 1 位の極を持つ ([Zagier, p.101]) ので、$\frac{1}{|\zeta_K(1)|} < \infty$ となり、r に関しても、有限となる。また、補題 3.7 より、$0 < \forall\varepsilon_2$ とすると、$|\ \sigma_0'(m)\ |^2 \ll |\ m\ |^{2\varepsilon_2}$ となる。よって、

$$(\text{式 (92) の左辺}) \ll \infty\ .$$

次に、(式 (93)) について考える。補題 3.79 の計算過程より、

$$(\text{式 (93) の左辺}) \le \frac{3}{2}K\sqrt{\pi}\ <\ \infty\ .$$

式 (94) について考える。補題 3.82 の証明と同様に、

$$\begin{aligned}
& (\ \pi\ |\ m\ |\ )^2 \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} \int_0^1\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty} \Bigg|\ |\ l\ |^{-4}\ S(\ m,m;l\ )t'^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1-r} \right)^{it-1} \\
\times\quad & J_1^*\left(\frac{2\pi\ |\ m\ |}{|\ l\ |} \left(\frac{1-(\ 2\sin\vartheta_0\ )^2 r(\ 1-r\ )t'}{r(\ 1-r\ )t'} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(e^{-(\ \frac{t}{K}\ )^2} - e^{-(\ \frac{2t}{K}\ )^2} \right) \Bigg|\ drdt'dt \\
\le\quad & 2(\ \pi\ |\ m\ |\ )^2 \sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} \int_0^1\int_0^1 |\ l\ |^{-3+2\varepsilon}\ t'^{-\frac{1}{2}} \frac{Q(\ r,K\ )}{r(\ 1-r\ )} drdt' \\
\ll\quad & \infty\ .
\end{aligned}$$

よって、補題 3.84 が示された。

補題 3.84 より、式変形での和や積分の交換ができる。よって、補題 3.79 が示された。

命題 3.87 $0 \neq m \in \mathbf{Z}[\omega]^*$ とする。$0 < K \in \mathbf{R}$ とする。このとき、m と K に関して一様に、

$$\sum_{\frac{1}{2}K \leq \kappa_j \leq K} |\ \rho_j(m)\ |^2\ e^{-\pi\kappa_j} \ll K^2 + K\ |\ m\ |^2$$

が成立する。

証明 $K \to 0$ のとき、κ_j は存在しないことに注意して、補題 3.79 と補題 3.82 をまとめる。よって、命題 3.87 が示された。

命題 3.87 を用いて、まだ証明していない補題 3.54 を示す。

証明 無限和に関しては、$j \to \infty$ のときを考えればよい。このとき、Stirling の公式より、$\Lambda(\ s_1, s_2; i\kappa_j\ ) \ll e^{-2\pi\kappa_j}$ となる。また、$|\ \rho_j(m)\ | \geq |\ \rho_j(n)\ |$ とする。よって、命題 3.87 より、

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\ \rho_j(m)\ |^2\ e^{-\pi\kappa_j} \cdot e^{-\pi\kappa_j} \ll \int_0^{\infty} (\ K^2 + K\ |\ m\ |\ ) e^{-\frac{\pi}{2}K}\ dK\ \ <\ \ \infty\ .$$

$|\ \rho_j(m)\ | < |\ \rho_j(n)\ |$ も同様になる。

積分に関しては、$t \to \infty$ のとき、Γ-factor の数は、分子よりも分母のほうが 2 つ多い。よって、補題 3.7 と Stirling の公式より、補題 3.84 の証明と同様となる。また、$t \to 0$ のときも、補題 3.84 の証明と同様となる。

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{|\ n\ |}{|\ m\ |} \right)^{it} \frac{\sigma'_{it}(m)\sigma'_{-it}(n)\Lambda(\ s_1, s_2; it\ )}{\left|\Gamma(\ 1+it\ )\zeta_K(\ 1+it\ )\right|^2} \right|\ dt\ \ < \infty\ .$$

よって、補題 3.54 が示された。

3.6 定理の証明

定理 1.8 を示す。

証明 **補題 3.88**

$$\int_{(0)} \lambda\Lambda(\ s, 2; \lambda\ )\mathcal{J}_\lambda(\ 2\pi\varpi\ )\ d\lambda = -\pi \int_{[\varepsilon]} \frac{r^2}{\sinh \pi r} \mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )\Gamma(\ s-1+ir\ )\Gamma(\ s-1-ir\ )\ dr\ .$$

証明 $\lambda = ir$ と変数変換する。また、$a \in \mathbf{R}$ のとき、

$$\int_{[a]} := \int_{(\ -\frac{1}{2}-a\ )i-\infty}^{(\ -\frac{1}{2}-a\ )i+\infty}$$

とする。$\mathrm{Im}\ ir = -\frac{1}{2} - \varepsilon$ のとき、$\mathrm{Re}\ (\ s-1+ir\ ) > 1$ かつ $\mathrm{Re}\ (\ s-1-ir\ ) > 0$ である。よって、補題 3.80、補題 3.81 と Cauchy の積分定理を用いて、まとめる。よって、補題 3.88 が示された。

命題 3.89

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\ \pi\kappa_j\ )}\kappa_j\Gamma(\ s-1+i\kappa_j\ )\Gamma(\ s-1-i\kappa_j\ ) \\
& +2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|\ n\ |}{|\ m\ |}\right)^{it}\frac{\sigma'_{it}(m)\sigma'_{-it}(n)}{\left|\zeta_K(\ 1+it\ )\right|^2}\Gamma(\ s-1+it\ )\Gamma(\ s-1-it\ )\ dt \\
= & \ (\ \delta_{m,n}+\delta_{m,n\omega}+\delta_{m,n\varpi}\ )2^{-1-2s}\pi^{-1}\Gamma(\ 2s-1\ ) \\
& +i\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}|\ l\ |^{-2}\ S(\ m,n;l\ )\int_{[\varepsilon]}\frac{r^2}{\sinh\pi r}\mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )\Gamma(\ s-1+ir\ )\Gamma(\ s-1-ir\ )\ dr\ .
\end{aligned}$$

証明　$0<\forall\varepsilon$ かつ ε を小さくとる。命題 3.44 に、$s_1=s$ を Re $s>\frac{3}{2}+\varepsilon$ を満たすようにとる。$s_2=2$ を代入する。このとき、s と $s_2=2$ は、命題 3.44 の条件を満たす。

補題 3.90 [Zagier, p.22 (11)]
$\forall s\in\mathbf{C}$ のとき、

$$\Gamma(\ \frac{s}{2}\ )\Gamma(\ \frac{s+1}{2}\ )=2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s)\ .$$

補題 3.80、補題 3.81 と補題 3.90 を用いる。

$$\begin{aligned}
& \langle\ P_m(\ \cdot,s\ ),P_n(\ \cdot,2\ )\ \rangle \\
= & \ 2\frac{(\ \pi\ |\ m\ |\ )^{1-s}}{|\ n\ |}\cdot\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\ 2s-1\ )} \\
& \times\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\ \pi\kappa_j\ )}\kappa_j\Gamma(\ s-1+i\kappa_j\ )\Gamma(\ s-1-i\kappa_j\ )\right. \\
& \left.+\ 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|\ n\ |}{|\ m\ |}\right)^{it}\frac{\sigma'_{it}(m)\sigma'_{it}(-n)}{\left|\zeta_K(\ 1+it\ )\right|^2}\Gamma(\ s-1+it\ )\Gamma(\ s-1-it\ )\ dt\right\}.
\end{aligned} \tag{95}$$

命題 3.70 に、$s_1=s$ を Re $s>\frac{3}{2}+\varepsilon$ を満たすようにとる。$s_2=2$ を代入する。このとき、s と $s_2=2$ は、命題 3.70 の条件を満たす。補題 3.88 を用いると、

$$\begin{aligned}
& \langle\ P_m(\ \cdot,s\ ),P_n(\ \cdot,2\ )\ \rangle \\
= & \ (\ \delta_{m,n}+\delta_{m,n\omega}+\delta_{m,n\varpi}\ )\Gamma(s)(\ 4\pi\ |\ m\ |\ )^{-s} \\
& +2i\frac{(\ \pi\ |\ m\ |\ )^{1-s}}{|\ n\ |}\cdot\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\ 2s-1\ )} \\
& \times\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}|\ l\ |^{-2}\ S(\ m,n;l\ )\int_{[\varepsilon]}\frac{r^2}{\sinh\pi r}\mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )\Gamma(\ s-1+ir\ )\Gamma(\ s-1-ir\ )\ dr\ .
\end{aligned} \tag{96}$$

式 (95) と式 (96) は等しいので、これらをまとめる。よって、命題 3.89 が示された。

命題 3.91

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\ \pi\kappa_j\ )}\kappa_j K_{2i\kappa_j}(v)\\
&+2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\ \frac{|\ n\ |}{|\ m\ |}\ \right)^{it}\frac{\sigma'_{it}(m)\sigma'_{-it}(n)}{\left|\zeta_K(\ 1+it\ )\right|^2}K_{2it}(v)\ dt\\
=\ &\frac{1}{8\pi}(\ \delta_{m,n}+\delta_{m,n\omega}+\delta_{m,n\overline{\omega}}\ )ve^{-v}\\
&+i\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}|\ l\ |^{-2}\ S(\ m,n;l\ )\int_{[\varepsilon]}\frac{r^2}{\sinh\pi r}\mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )K_{2ir}(v)\ dr\ .
\end{aligned}$$

証明 3.89 の両辺に、$0<v\in\mathbf{R}$ を満たす $\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}$ を掛けて、$\int_{(2)}\cdots\ ds$ を行う。

補題 3.92 この計算過程において、和や積分等の順序を交換できる。

証明

$$\int_{(2)}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\ \pi\kappa_j\ )}\kappa_j\Gamma(\ s-1+i\kappa_j\ )\Gamma(\ s-1-i\kappa_j\ )\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\right|\ ds\ <\ \infty\ . \tag{97}$$

$$2\pi\int_{(2)}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\ \frac{|\ n\ |}{|\ m\ |}\ \right)^{it}\frac{\sigma'_{it}(m)\sigma'_{-it}(n)}{\left|\zeta_K(\ 1+it\ )\right|^2}\Gamma(\ s-1+it\ )\Gamma(\ s-1-it\ )\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\right|\ dtds\ <\ \infty\ . \tag{98}$$

$$(\ \delta_{m,n}+\delta_{m,n\omega}+\delta_{m,n\overline{\omega}}\ )\int_{(2)}\left|2^{-1-2s}\pi^{-1}\Gamma(\ 2s-1\ )\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\right|\ ds\ <\ \infty\ . \tag{99}$$

$$\begin{aligned}
&i\int_{(2)}\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\int_{[\varepsilon]}\Bigg|\,|\ l\ |^{-2}\ S(\ m,n;l\ )\frac{r^2}{\sinh\pi r}\\
&\mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )\Gamma(\ s-1+ir\ )\Gamma(\ s-1-ir\ )\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\Bigg|\ drds\ <\ \infty\ .
\end{aligned} \tag{100}$$

式 (97) について考える。補題 3.81 より、

$$\frac{1}{|\sinh(\ \pi\kappa_j\ )\ |}=\frac{2}{e^{\pi\kappa_j}-e^{-\pi\kappa_j}}=O(\ e^{-\pi\kappa_j}\ )\ . \tag{101}$$

$\kappa_j\to\infty$ のとき、Stirling の公式より、

$$\begin{aligned}
\Gamma(\ s-1+i\kappa_j\ )\ &=\ O(\ e^{-\frac{\pi}{2}\kappa_j}\ )\ , &(102)\\
\Gamma(\ s-1-i\kappa_j\ )\ &=\ O(\ e^{-\frac{\pi}{2}\kappa_j}\ )\ . &(103)
\end{aligned}$$

また、$|\ \rho_j(m)\ |\geq|\ \rho_j(n)\ |$ とする。$\kappa_j\ \to\ \infty$ かつ $|\ \mathrm{Im}\ \ s\ |\to\ \infty$ のとき、命題 3.87、式 (102) と式 (103)、より、exponential factor に注意すると、

$$(\text{式 (97) の左辺}) \ll \int_{(2)}\int_0^{\infty}(\ K^2+K\mid m\mid^2\ )e^{-\frac{\pi}{2}K}Ke^{-\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\ \ s|}\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{-2}\ dKds\ <\ \infty\ .$$

$\kappa_j\ \to\ 0$ のみのとき、$|\ \mathrm{Im}\ \ s\ |\to\ \infty$ についてのみ、同様に考えればよい。
$|\ \mathrm{Im}\ \ s\ |\to\ 0$ のみのとき、$\kappa_j\ \to\ \infty$ についてのみ、同様に考えればよい。
$\kappa_j\ \to\ 0$ かつ $|\ \mathrm{Im}\ \ s\ |\to\ 0$ のとき、積分路や和での数が有限であるから、(式 (97) の左辺) $<\infty$ となる。$|\ \rho_j(m)\ |<|\ \rho_j(n)\ |$ のときも同様になる。

次に、式 (98) について考える。補題 3.84 の証明と式 (97) の証明と同様にすればよい。

次に、式 (99) について考える。$|\ \mathrm{Im}\ \ s\ |\to\infty$ のとき、Stirling の公式より、exponential factor に注意すると、

$$(\text{式 (99) の左辺}) \leq \frac{3}{2\pi}\int_1^{\infty}2^{-2\,\mathrm{Re}\ \ s}\mid \mathrm{Im}\ \ 2s\mid^{\mathrm{Re}\ \ 2s-1-\frac{1}{2}}e^{-|\mathrm{Im}\ \ 2s|}\ ds\ <\ \infty.$$

$|\ \mathrm{Im}\ s\ |\to 0$ のとき、式の形と積分路が有限であることから、(式 (99) の左辺) $<\infty$ となる。

次に、式 (100) について考える。このとき、$\mathrm{Re}\ \ ir=\frac{1}{2}+\varepsilon>-\frac{1}{2}$ である。また、補題 3.62 の条件を満たすように、同一視できる l のイデアルを考える。よって、補題 3.62 より、

$$\begin{aligned}|\ \mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )\ | \quad &= \quad \frac{2^{-1-2\varepsilon}\mid 2\pi\varpi\mid^{1+2\varepsilon}}{\pi\left|\Gamma(\ ir+\frac{1}{2}\ )\right|}\int_0^{\pi}|\cos(\ 2\pi\varpi\cos\theta\ )||\ (\ \sin\theta\ )^{2ir}\ |\ \ d\theta \\ &\quad \times\int_0^{\pi}|\cos(\ \overline{2\pi\varpi}\cos\theta\ )||\ (\ \sin\theta\ )^{2ir}\ |\ \ d\theta\ . \qquad (104)\end{aligned}$$

補題 3.81 より、

$$\begin{aligned}|\cos(\ 2\pi\varpi\cos\theta\ )\ | \quad &= \quad \sqrt{(\cos(\ \mathrm{Re}\ \ 2\pi\varpi\cos\theta\ ))^2+(\sinh(\ \mathrm{Im}\ \ 2\pi\varpi\cos\theta\ ))^2} \\ &\ll \quad e^{\mathrm{Im}\ \ 2\pi\varpi\cos\theta}\ . \qquad (105)\end{aligned}$$

同様に、

$$\cos(\ \overline{2\pi\varpi}\cos\theta\ ) \quad \ll \quad e^{-\ \mathrm{Im}\ \ 2\pi\varpi\cos\theta}\ , \qquad (106)$$

補題 3.6、式 (105) と式 (106) より、

$$(\text{式 (104)}) \ll \frac{1}{\left|\Gamma(\ ir+\frac{1}{2}\ )\right|}\cdot|\ l\ |^{-1-2\varepsilon}\quad . \qquad (107)$$

$|\ \mathrm{Re}\ \ r\ |\to\infty$ かつ $|\ \mathrm{Im}\ \ s\ |\to\infty$ のとき、補題 3.81 と Stirling の公式より、

$$\begin{aligned}(\text{式 (104)}) \quad &\ll \quad e^{\pi|\mathrm{Re}\ \ r|}\ |\ l\ |^{-1-2\varepsilon}\ , \\ \frac{r}{\sinh(\ \pi r\ )} \quad &\ll \quad r\cdot e^{-\pi|\mathrm{Re}\ \ r|}\ , \\ \Gamma(\ s-1+ir\ ) \quad &\ll \quad e^{-\frac{\pi}{2}|\mathrm{Re}\ \ r|}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\ \ s|}\ , \\ \Gamma(\ s-1-ir\ ) \quad &\ll \quad e^{-\frac{\pi}{2}|\mathrm{Re}\ \ r|}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\ \ s|}\ .\end{aligned}$$

l について考える。補題 3.6 と補題 3.7 より、$\forall\varepsilon_1 > 0$ に対して、$\sigma_0(l) =| l |^{2\varepsilon_1}$ とすると、

$$\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]} | l |^{-2+2\varepsilon_1-2\varepsilon} \leq 6 + \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty} r^{-2+2\varepsilon_1-2\varepsilon}\cdot r\ drd\theta\ . \tag{108}$$

$\varepsilon_1 < \varepsilon$ とすると、

$$(\text{式 } (108)) = \frac{\pi}{\varepsilon-\varepsilon_1}\ <\ \infty$$

となり、これらを用いて、exponential factor に注意すると、(式 (100) の左辺) $< \infty$ となる。$|\ \mathrm{Re}\ r\ |\to 0$ のみのとき、$|\ \mathrm{Im}\ s\ |\to\infty$ についてのみ、同様に考えればよい。$|\ \mathrm{Im}\ s\ |\to 0$ のみのとき、$|\ \mathrm{Re}\ r\ |\to\infty$ についてのみ、同様に考えればよい。$|\ \mathrm{Re}\ r\ |\to 0$ かつ $|\ \mathrm{Im}\ s\ |\to 0$ のとき、式の形と積分路が有限であるから、(式 (100) の左辺) $< \infty$ となる。よって、補題 3.92 が示された。

補題 3.92 より、和や積分等の順序を交換して、計算する。

補題 3.93 [本橋 1 , p.272 (2.15)]
$u > 0$ かつ $2\alpha >|\ \mathrm{Re}\ \nu\ |$ のとき、

$$K_\nu(u) = \frac{1}{4\pi i}\int_{(\alpha)}\Gamma(\ \eta+\frac{1}{2}\nu\ )\Gamma(\ \eta-\frac{1}{2}\nu\ )\left(\ \frac{u}{2}\ \right)^{-2\eta}\ d\eta\ .$$

$\eta = s-1$ かつ $\nu = 2i\kappa_j$ とおくと、補題 3.93 の条件を満たす。よって、補題 3.93 より、

$$\int_{(2)}\Gamma(\ s-1+i\kappa_j\ )\Gamma(\ s-1-i\kappa_j\ )\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\ ds = 4\pi i K_{2i\kappa_j}(v)\ . \tag{109}$$

同様に、

$$\int_{(2)}\Gamma(\ s-1+it\ )\Gamma(\ s-1-it\ )\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\ ds = 4\pi i K_{2it}(v)\ . \tag{110}$$

$\eta = s-1$ かつ $\nu = 2ir$ とおくと、$0 < \varepsilon < \frac{3}{2}$ のとき、補題 3.93 の条件を満たす。よって、補題 3.93 より、

$$\int_{(2)}\Gamma(\ s-1+ir\ )\Gamma(\ s-1-ir\ )\left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\ ds = 4\pi i K_{2ir}(v)\ . \tag{111}$$

補題 3.94 [数学公式 , p.8]
$a > 0$ のとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\ a-t\ )z^t\ dt = 2\pi i z^a e^{-z}\ .$$

補題 3.94 より、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\ a+t\ )z^{-t}\ dt = 2\pi i z^a e^{-z}\ . \tag{112}$$

$-t = 2-2s$ かつ $a = 1$ とおくと、補題 3.94 の条件を満たす。また、Re $2s-1 = 3 > 0$ より、Γ-function に極はない。Cauchy の積分定理より、

$$\begin{aligned}
& (\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) \int_{(2)} 2^{-1-2s}\pi^{-1}\Gamma(\ 2s-1\ ) \left(\ \frac{v}{2}\ \right)^{2-2s}\ ds \\
= \quad & \frac{1}{8\pi}(\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) \cdot \int_{(2)} \Gamma(\ 2s-1\ ) v^{2-2s}\ ds \\
= \quad & \frac{1}{8\pi}(\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) \cdot 4\pi i v e^{-v}\ . \qquad (113)
\end{aligned}$$

式 (109)、式 (110)、式 (111) と式 (113) を用いて、まとめる。よって、命題 3.91 が示された。

命題 3.91 の両辺に、

$$g(v) = \frac{1}{\pi^2 v} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \sinh(\ \pi\xi\ ) K_{i\xi}(v) h(\ \frac{\xi}{2}\ )\ d\xi$$

を掛けて、$\int_0^\infty \cdots\ dv$ を行う。

補題 3.95 この計算過程において、和や積分等の順序を交換できる。

証明

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\ \pi\kappa_j\ )} \kappa_j K_{2i\kappa_j}(v) g(v) \right|\ dv\ <\ \infty\ . \qquad (114)$$

$$2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \left(\ \frac{|\ n\ |}{|\ m\ |}\ \right)^{it} \frac{\sigma'_{it}(m)\sigma'_{-it}(n)}{\left|\zeta_K(\ 1+it\ )\right|^2} K_{2it}(v) g(v) \right|\ dtdv\ <\ \infty\ . \qquad (115)$$

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \left|(\ \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}}\ ) v e^{-v} g(v)\right|\ dv\ <\ \infty\ . \qquad (116)$$

$$i \int_0^\infty \int_{[\varepsilon]} \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} \left| |\ l\ |^{-2}\ S(\ m,n;l\ ) \frac{r^2}{\sinh \pi r} \mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ ) K_{2ir}(v) g(v) \right|\ drdv\ <\ \infty\ . \qquad (117)$$

補題 3.96 [本橋 2 , p.82-83]
$0 < \forall\delta$ を満たし、かつ小さいとする。

$$g(v) \ll \begin{cases} v^{-\frac{1}{2}+2\delta} & v \to 0+ \text{ のとき}\ , \\ e^{-v} & v \to +\infty \text{ のとき}\ . \end{cases}$$

$\forall v \geq 0$ かつ $|\ r\ | \geq 1$ を満たす $r \in \mathbf{C}$ とする。

$$K_{2ir}(v) \ll v^{2\,\mathrm{Im}\ r} e^{-|r|}\ .$$

式 (114) について考える。3.91 の証明と同様に考える。

$$\frac{\kappa_j}{\sinh(\ \pi\kappa_j\ )} = O(\kappa_j\ e^{-\pi\kappa_j}\ ) \tag{118}$$

である。また、$|\ \overline{\rho_j(m)}\ | \geq |\ \rho_j(n)\ |$ とおく。$1 \leq \kappa_j$ のとき、補題 3.96 の条件を満たす。よって、命題 3.87 と補題 3.96 より、exponential factor に注意すると、

$$\begin{aligned}
(\text{式 } (114)) \quad &\ll \quad \int_0^\infty \int_1^\infty \sum_{\frac{K}{2} \leq \kappa_j \leq K} \overline{\rho_j(m)} \rho_j(n) e^{-\pi\kappa_j} v^{2\,\mathrm{Im}\ \kappa_j} \kappa_j e^{-|\kappa_j|} g(v)\ dKdv \\
&\ll \quad \int_0^\infty \int_1^\infty (\ K^3 + K^2\ |\ m\ |\ ) e^{-\frac{K}{2}} g(v)\ dKdv \\
&\ll \quad \int_0^1 v^{-\frac{1}{2}+2\delta} dv \cdot \int_1^\infty e^{-v} dv \ < \ \infty\ .
\end{aligned} \tag{119}$$

$|\ \overline{\rho(m)}\ | < |\ \rho(n)\ |$ のときも、同様に計算する。$0 < \kappa_j < 1$ のとき、K での積分路は有限である。式 (109) より、κ_j と v に対して、$K_{2i\kappa_j}(v)$ は、収束する。v に対しては、同様に考える。よって、式 (114) は成立する。

式 (115) について、補題 3.84 の証明と式 (114) の証明と同様に考える。

式 (116) について考える。補題 3.96 より、exponential factor に注意すると、

$$\begin{aligned}
(\text{式 } (116)) \quad &\ll \quad \int_0^1 v e^{-v} v^{-\frac{1}{2}+2\delta}\ dv + \int_1^\infty v e^{-v} e^{-v}\ dv \\
&\ll \quad \int_0^1 v^{\frac{1}{2}+2\delta}\ dv\ .
\end{aligned} \tag{120}$$

$\delta < \frac{3}{4}$ のとき、

$$(\text{式 } (120)) \ < \ \infty\ .$$

式 (117) について考える。補題 3.6 と補題 3.96 より、式 (100) の証明と同様に、$1 \leq |\ r\ |$ のとき、exponential factor に注意すると、r と v に関して、式 (117) は成立する。$0 \leq |\ r\ | < 1$ のとき、r の積分路は有限である。式の形から、r に関して、式 (117) は成立する。v に関しては、$1 \leq |\ r\ |$ のときと同様にする。後は、l について考える。補題 3.6 と補題 3.7 より、$\forall \varepsilon_1 > 0$ に対して、$\sigma_0(l) = |\ l\ |^{2\varepsilon_1}$ とする。式 (100) の証明と同様に、$\varepsilon_1 < \varepsilon$ のとき、式 (117) は成立する。よって、補題 3.95 が成立する。

補題 3.97 [本橋 2 , p.269-270 Lemma.2]
$r \in \mathbf{C}$ とする。関数 $h(r)$ を偶関数かつ、$0 < \exists\alpha$ に対して、$|\ \mathrm{Im}\ \ r\ | \leq \alpha$ で正則し、$h(r) \ll e^{-2\pi|r|}$ を満たすとする。$|\ \mathrm{Im}\ \ t\ | < \alpha$ のとき、

$$h(t) = \pi^{-2} \int_0^\infty K_{it}(v) v^{-1} \int_{-\infty}^\infty r \sinh(\ \pi r\ ) K_{ir}(v) h(r)\ drdv\ .$$

補題 3.97 を満たすように、$0 < d \in \mathbf{R}$ として、$h(r)$ を $h(r)e^{-d|r|^2}$ と置き換える。

補題 3.98 [本橋 1 , p.285]

$$\int_0^\infty ve^{-v}g(v)\ dv = 8\pi^{-1}\int_{-\infty}^\infty r^2h(r)\ dr\ .$$

補題 3.95 より、和や積分等の順序を交換して、計算する。$h(r)$ は補題 3.97 の条件を満たす。よって、補題 3.97 より、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty K_{2i\kappa_j}(v)g(v)\ dv &= h(\kappa_j)\ , &(121)\\ \int_0^\infty K_{2it}(v)g(v)\ dv &= h(t)\ , &(122)\\ \int_0^\infty K_{2ir}(v)g(v)\ dv &= h(r)\ . &(123)\end{aligned}$$

また、補題 3.98 より、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8\pi}\int_0^\infty (\ \delta_{m,n}+\delta_{m,n\omega}+\delta_{m,n\varpi}\ )ve^{-v}g(v)\ dv\\ =\ &\pi^{-2}(\ \delta_{m,n}+\delta_{m,n\omega}+\delta_{m,n\varpi}\ )\int_{-\infty}^\infty r^2h(r)\ dr\ . \qquad (124)\end{aligned}$$

また、Cauchy の積分定理より、

$$\begin{aligned}i\int_{[\varepsilon]}\frac{r^2}{\sinh\pi r}\mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )h(r)\ dr &= i\int_{-\infty}^\infty\frac{r^2}{\sinh\pi r}\mathcal{J}_{ir}(\ 2\pi\varpi\ )h(r)\ dr\\ &= \check{h}(\ 2\pi\varpi\ )\ . \qquad (125)\end{aligned}$$

式 (121)、式 (123)、式 (124) と式 (125) を用いて、まとめる。

$h(r)$ の条件を緩くすることを考える。導いた等式において、関数 $h(r)$ の条件を $h(r) \ll (\ 1+|\ r\ |\ )^{-4-\varepsilon}$ として考える。このとき、それぞれの式で収束が成り立てば、この等式は存在し、成立する。

命題 3.99 以下の 4 つを示せばよい。

$$\sum_{j=1}^\infty\left|\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\sinh(\ \pi\kappa_j\ )}\kappa_jh(\kappa_j)\right|\ <\ \infty\ . \qquad (126)$$

$$2\pi\int_{-\infty}^\infty\left|\left(\ \frac{|\ n\ |}{|\ m\ |}\ \right)^{it}\frac{\sigma'_{it}(m)\sigma'_{-it}(n)}{\left|\zeta_K(\ 1+it\ )\right|^2}h(t)\right|\ dt\ <\ \infty\ . \qquad (127)$$

$$\pi^{-2}\int_{-\infty}^\infty\left|(\ \delta_{m,n}+\delta_{m,n\omega}+\delta_{m,n\varpi}\ )r^2h(r)\right|\ dr\ <\ \infty\ . \qquad (128)$$

$$\sum_{0\neq l\in\mathbf{Z}[\omega]}\left||\ l\ |^{-2}\ S(\ m,n;l\ )\check{h}(\ 2\pi\varpi\ )\right|\ <\ \infty\ . \qquad (129)$$

証明　補題 3.95 と同様に考える。まず、式 (126) を考える。$|\overline{\rho_j(m)}| \geq |\rho_j(n)|$ とおくと、命題 3.87 と式 (118) より、

$$\begin{aligned}
(\text{式 (126) の左辺}) &\ll \int_0^{\infty} \sum_{\frac{K}{2} \leq \kappa_j \leq K} |\rho_j(m)|^2 \, e^{-\pi\kappa_j} \kappa_j h(\kappa_j) \, dK \\
&\ll \int_0^{\infty} (\, K^3 + K^2 \,|\, m \,|\,)(\, 1 + |\, K \,|\,)^{-4-\varepsilon} \, dK \\
&\ll \int_0^{\infty} (\, 1 + K \,)^{-1-\varepsilon} \; < \; \infty \, .
\end{aligned}$$

次に、式 (127) を考える。補題 3.95 と同様に考えると、

$$(\text{式 (127) の左辺}) \ll \infty.$$

次に、式 (128) を考える。

$$\begin{aligned}
(\text{式 (128) の左辺}) &\ll \pi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|(\, \delta_{m,n} + \delta_{m,n\omega} + \delta_{m,n\overline{\omega}} \,) r^2 h(r)\right| \, dr \\
&\ll \int_{-\infty}^{\infty} (\, 1 + |\, r \,|\,)^{-2-\varepsilon} dr \; < \; \infty.
\end{aligned}$$

次に、式 (129) を考える。$0 < \forall\varepsilon_1$ とする。$|\, r \,| \to \infty$ のとき、補題 3.62 と Stirling の公式から、

$$|\, \mathcal{J}_{ir}(t) \,| = |\, J_{ir}(t) J_{ir}(\overline{t}) \,| = e^{-\pi|r|} \,|\, l \,|^{-1-2\varepsilon}$$

となる。$|\, r \,| \to 0$ のときは、補題 3.95 と同様である。よって、補題 3.95 と同様に考えると、$\varepsilon_1 < \varepsilon$ のとき、

$$(\text{式 (129) の左辺}) \ll \sum_{0 \neq l \in \mathbf{Z}[\omega]} |\, l \,|^{-2-2\varepsilon+2\varepsilon_1} \; < \; \infty.$$

よって、命題 3.99 が示された。

以上をまとめる。よって、本論文の定理 1.8 が証明された。

参考文献

[Churchill/Brown] R. V. Churchill and J. W. Brown. 中野實訳、『複素関数入門（原書第４版）』サイエンティスト社、（１９９９年）

[Elstrodt etc.] J. Elstrodt, F. Grunewald and J. Mennicke. Groups Acting on Hyperbolic Space (Harmonic Analysis and Number Theory). Springer, (1997).

[Erdélyi etc.] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, vol. 2. Mcgraw-Hill book company, (1953).

[長谷川] 長谷川泰子著、「約数関数 d(n) の評価について」、『『数学研究法』セミナー報告集』（２００１年度）

[Kuznecov] N. V. Kuznecov. Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums. Math. USSR Sbornik vol. 39, (1981), No. 3.

[三井] 三井孝美著、『解析的数論』岩波書店、（１９８９年)

[数学公式　] 森口繁一、宇田川　久、一松信著、『数学公式　—特殊関数—』岩波全書２４４、岩波書店、（１９８４年）

[本橋１] Y. Motohashi. Trace Formula over the Hyperbolic Upper Half Space. Lecture Notes 247. London Math. Soc. , (1997).

[本橋２] Y. Motohashi. Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function. Cambridge, (1997).

[Sarnak] P. Sarnak. The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds. Acta Math. , 151. (1983).

[高木] 高木貞治著、『初等整数論講義　第２版』共立出版、（１９９９年）

[田村] 田村二郎著、『数学選書３　解析関数（新版）』裳華房、（１９９６年）

[Titchmarsh] E. C. Titchmarsh. The Theory of the Riemann Zeta-Funciton. Oxford, (1967).

[Watson] G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions Second Edition. Cambridge, (1966).

[Zagier] D. B. Zagier. 片山孝次訳、『数論入門—ゼータ関数と２次体—』岩波書店、（１９９０年）