リーマン予想*

小山信也（慶應大）

平成 12 年 12 月 15 日

1　リーマン予想（ＲＨ）とは

リーマン・ゼータは、複素変数 s の関数であり右半平面 $\mathrm{Re}(s) > 1$ における絶対収束積あるいは絶対収束級数として

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義される。リーマンは $\zeta(s)$ が全複素平面 $s \in \mathbf{C}$ 上に有理型接続可能であり、$s = 1$ に一位の極を持つ他は正則であること、および関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

が成立することを証明した。彼は 1859 年の論文 [9] にて、素数の個数を $\zeta(s)$ の複素零点によって表す公式を証明した。そこでは $s = \frac{1}{2} + it$ とおいたうえで関数

$$\xi(t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{1}$$

を導入し、$\xi(t)$ が t の偶関数であり、零点が $-1/2 \le \mathrm{Im}(t) \le 1/2$ の範囲にあることを証明した。そして彼は $\xi(t)$ のすべての零点は実数であろうと予想するに至った。これは $\zeta(s)$ に戻して考えると

$\zeta(\mathbf{s})$ の零点は、 $\mathbf{\Gamma(s/2)}$ の極と一致して打ち消し合うか、
または $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \mathbf{1/2}$ 上にある

となる。これがリーマン予想である。このうち $\Gamma(s/2)$ の極と打ち消し合うのは s が負の偶数の場合であり、これを自明零点と呼び、それ以外のものを非自明零点と呼ぶ。リーマン予想は

$\zeta(\mathbf{s})$ の非自明零点は $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \mathbf{1/2}$ 上にある

*数学セミナー 2000 年 11 月号の記事原稿に加筆したバージョン

ともいいかえられる。非自明零点は $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ の範囲にしかないことが証明されている。

なお「リーマン予想」は英語で Riemann Hypothesis という。（Conjecture ではない。）以下、リーマン予想をＲＨと略記する。

2　ＲＨと素数分布

素数の分布は、各 $x > 0$ に対して x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ がわかれば完全にわかる。$\pi(x)$ の挙動を研究する際、リーマン・ゼータは欠かせない。その理由はオイラー積表示

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \tag{2}$$

にある。ここで右辺は p が素数の全体を渡る。一般に、関数の対数微分の極は元の関数の零点と極であり、留数は元の関数の零点や極の位数であるから、式 (2) の両辺の対数微分を取り、それらに適当な関数（test function）をかけて適当な複素領域で積分することにより、

$$\textbf{零点と極に渡る和＝素数に渡る和} \tag{3}$$

という形の等式を得る。これは明示公式（explicit formula）と呼ばれる。

素数分布で重要な $\pi(x)$ は、x 以下の素数については 1、それ以外の素数については 0 を加えた「素数に渡る和」とみなせるから、明示公式を使えば $\pi(x)$ をリーマン・ゼータの零点と極を用いて完全に表すことができる。

こうして $\pi(x)$ を表した結果、素数定理

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \to \infty) \tag{4}$$

を得る。これは $\pi(x)$ の主要項を表しており、明示公式 (3) の左辺における極 $s = 1$ の寄与である。他の零点 ρ は、だいたい $x^\rho / \log x$ のオーダーで寄与することが知られている。この ρ に渡る和が素数定理 (4) の誤差項である。$\mathrm{Re}(\rho) < 1$ であることと後述 (6) の事実により、この誤差項は (4) の右辺よりも実際に小さいことがわかる。しかし、x のオーダーとしてどれくらい小さいか、それを知るには、任意の零点 ρ に対して $\mathrm{Re}(\rho) \le \delta < 1$ なる δ を見つけなくてはならない。このような δ を発見することにはこれまでに誰も成功していない。その意味では、素数定理 (4) の精密化は前人未到の難問である。

ＲＨは $\delta = 1/2$ を主張するものであり、ＲＨが成立することは、素数定理 (4) の誤差項が

$$O(x^{1/2} \log x) \tag{5}$$

となることと同値である。

以上は誤差項の上界に関する結果であるが、一方、下界に関する結果は Littlewood (1914) により得られており，この誤差項は少なくとも

$$x^{1/2}\log\log\log x/\log x$$

の振動を有することが証明されている。したがって、ＲＨに同値な評価 (5) は、真実に非常に近い誤差項であるといえる。リーマン・ゼータは素数の出現率に関する究極的な評価を内包している関数なのである。

3 いろいろなゼータ

ＲＨは、外見上はたった 1 つの特殊な関数についての予想であり、一見したところではそれほど重要な問題に思えないかもしれない。リーマン自身もそう思っていたらしく、以下のように述べている。—この命題（ＲＨ）の証明ができればそれに越したことはない。しかし、いくつかあれこれやってみたがうまくいかず、ここのところ放ってある。今やっている研究がうまくいくためにこれが必要だとも思えない。—

しかしその後の数学の発展の中で、ＲＨの重要性は広く認識されるに至った。その根拠は素数分布論への応用ばかりではない。現在ではゼータと呼ばれる関数は実に多くの種類が知られており、それらの大半がＲＨの類似を満たすと予想されている。リーマン・ゼータは孤立した特殊な関数ではないのである。

そこで、種々のゼータに関し、ＲＨの現状をここで整理しておこう。以下にあらわれるゼータは、それぞれに関するＲＨを満たすことが予想されている。(3.4 Selberg 型に関しては数論的な場合にＲＨが予想されている。)

3.1 Hecke-Langlands 型

保型形式あるいは保型表現から作られるゼータである。大雑把にいって、リーマン・ゼータとほぼ同じ状況といってよい。解析接続および関数等式は証明されているが、ＲＨは未解決である。なお、リーマン・ゼータや Dirichlet Ｌ、代数体の Dedekind ゼータは、以下の Hasse-Weil 型、Artin 型の実例でもあるが、ＲＨに関する進展度という観点からは、本項に属するとみなす方がわかりやすい。

3.2 Hasse-Weil 型

代数多様体（スキーム）のゼータである。有限体上で定義される場合は合同ゼータと呼ばれ、のちに述べるようにＲＨは証明されている。標数０の場合は解析接続、関数等式も一般にわかっておらず、ＲＨ以前の段階である。ただし、

有理数体上の楕円曲線に関しては、Wiles らにより前項の Hecke-Langlands 型に一致すること（谷山・志村予想）が証明された。

3.3 Artin 型

代数体のガロア拡大とその表現から作られるゼータである。全平面への有理型接続と関数等式は知られているが、正則性（Artin 予想）およびＲＨは未解決である。

3.4 Selberg 型

階数 1 の半単純リー群の離散部分群、あるいはそれを基本群に持つ双曲多様体のゼータである。セルバーグ跡公式により、ゼータの解析接続や関数等式は知られており、ゼータの零点はラプラシアンのスペクトルに対応する。ＲＨはラプラシアンの最小固有値が $(d-1)/4$ 以上（d は多様体の次元）であることと同値であり、多様体が数論的な場合には成立が予想されている。これは「セルバーグの固有値予想」とも呼ばれる。基本群が $PSL(2,\mathbf{Z})$ （2 次元）、$PSL(2,\mathbf{Z}[\sqrt{-1}])$ （3 次元）など、いくつかの場合にはＲＨが証明されている。非数論的な場合にはＲＨを満たさない反例がある。しかし，そうした場合にも、$(d-1)/4$ より小さな固有値は有限個しかなく，それらに対応する有限個の零点を除いたほとんどすべての零点はＲＨを満たす。この状況を称して「セルバーグ・ゼータはＲＨがほとんど成立している」という。

4 ＲＨの裏付け

ＲＨの成立を裏付ける結果を以下に列挙する。

4.1 数値計算

リーマン・ゼータの非自明零点 $s=\sigma+it$ を考える際、式 (1) の $\xi(t)$ が偶関数であることから、$t \geq 0$ の範囲に限って考えればよい。$t \geq 0$ で小さい方から零点を並べたときに、少なくとも最初の 15 億個の零点はＲＨを満たすことが知られている。[6]

4.2 例外零点の個数の評価

$N(T)$ を $\zeta(s)$ の非自明零点のうちで虚部が 0 以上 T 以下であるようなものの個数とおき、$N(\alpha,T)$ を、そのうちさらに実部が α であるようなものの

個数とおく。リーマンにより

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} \tag{6}$$

が知られている。ＲＨは

$$N(T) = N(1/2, T)$$

あるいは

$$N(\alpha, T) = 0 \quad (\alpha \neq 1/2)$$

と表される。$\alpha \neq 1/2$ のとき、$N(\alpha, T)$ はＲＨを満たさないような非自明零点の個数を表す。このようなものは例外零点（exceptional zeros）と呼ばれ、これをなるべく小さく評価することは、ＲＨの裏付けになる。この方向の結果で最初のものは Bohr-Landau (1914) による

$$N(\alpha, T) = O(T) \quad (1/2 < \alpha < 1)$$

であろう。これは Carlson (1920) により、以下のように改善された。

$$N(\alpha, T) = O(T^{4\alpha(1-\alpha)+\epsilon}) \quad (1/2 < \alpha < 1,\ \epsilon > 0)$$

ここで T の指数が 1 より小さいことに注目するべきである。以後、この方向の研究は α の区間をさらに細かく分け、各々の区間について改善がなされている。$3/4 < \alpha < 1$ においては、この区間をさらに細分して得た結果が多数ある。$1/2 < \alpha < 3/4$ においては、Ingham (1940) の指数 $3(1-\alpha)/(2-\alpha)$ が最善である。

4.3 ＲＨを満たす零点の割合

極限値

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N(1/2, T)}{N(T)} \tag{7}$$

は、ＲＨを満たすような非自明零点の割合を表している。これが１に近いほど望ましいわけである。式 (7) の値は Selberg (1942), Levinson (1974) によって研究されてきたが、現在では Conrey (1989) [2] の

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N(1/2, T)}{N(T)} \geq \frac{2}{5}$$

が最良の結果である。すなわち少なくとも 40 ％の非自明零点はＲＨを満たすことが証明されている。

4.4 合同ゼータ

合同ゼータはリーマン・ゼータの正標数類似としてコルンブルムにより発見され，のちに Artin, Hasse, Schmidt らによって研究された。C を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の代数曲線とし，C の $\mathbf{F}_{q^m}$-有理点の個数を N_m とおくとき、C の合同ゼータは

$$Z(u,C) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{u^m}{m}\right)$$

で定義される。これはオイラー積やディリクレ級数であらわすこともでき、Hasse-Weil 型ゼータの一種である。変数を $u = q^{-s}$ により置き換えて s の関数とみたとき、$Z(u,C) = \zeta(s,C)$ と書く。

$\zeta(s,C)$ は関数等式

$$q^{(g-1)s}\zeta(s,C) = q^{(g-1)(1-s)}\zeta(1-s,C)$$

を満たす。ここで g は曲線 C の種数と呼ばれる整数である。$\zeta(s,C)$ は $u = q^{-s}$ の有理関数である。すなわち、s の関数としてみると、$\zeta(s,C)$ は周期 $2\pi i/\log q$ の周期関数であり、$s = 2\pi im/\log q$ および $s = 1 + 2\pi im/\log q$ $(m \in \mathbf{Z})$ に一位の極を持つ。したがって、極は実部が 0 と 1 の線上にある。ＲＨは、零点が実部 $1/2$ 上に並ぶことであり、これはちょうど極の並んでいる 2 本の線の中央にまっすぐ零点が並ぶことである。

以上を変数 u についていいかえると、$Z(u,C)$ の極は $u = 1$ と $u = q^{-1}$ にあり、ともに位数１であることが知られており、零点の絶対値が $|u| = q^{-1/2}$ を満たすだろうという予想がＲＨである。

以上が合同ゼータに対するＲＨである。この証明は、種数 g によって段階的になされてきた。まず $g = 0$ の場合、$\zeta(s,C)$ の分子は 1 になりＲＨは自明に成立している。次に $g = 1$ の場合は Hasse (1934) により証明された。一般の g で証明したのは Weil [14, 15] である。Weil の証明については，後節に詳しく述べる。

Weil は曲線の合同ゼータを研究するうちに、より高次元の代数多様体 V に対する合同ゼータのＲＨを定式化し、予想した。それは、

$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{V})$ の極、零点の逆数の絶対値は $\mathbf{q}^{\mathbf{d/2}}$

と整数 $d \geq 0$ を用いてあらわすことができ、さらにそれらは V のコホモロジー上に作用するフロベニウス自己同型の固有値として解釈できるだろう、というものであった。のちに Artin, Grothendieck, Verdier らによりエタール・コホモロジーの理論が発展し、ついに Deligne [3, 4] によって任意の代数多様体の合同ゼータのＲＨが証明された。

合同ゼータは、リーマン・ゼータと直接には関係がない関数であるが、代数体と関数体の類似は現代の整数論において広く認められていることであり、合同ゼータに関してＲＨが証明されたことは、リーマン・ゼータに関する元来のＲＨの成立により深い根拠を与えたといってよいであろう。

5　ＲＨの奥深さ

本節ではＲＨが多くの分野と影響しあっている様子を、3 つの実例を通して概観する。

5.1　不動点定理と指数定理

一般の test function f を用いたリーマン・ゼータの明示公式は、以下のように表される。f は正の実数上で定義される複素数値連続関数で，高々有限個の点を除いて連続微分可能とし、ある $\delta > 0$ に対して評価式

$$f(x) = \begin{cases} O(x^{\delta}) & (x \to 0) \\ O(x^{-1-\delta}) & (x \to \infty) \end{cases}$$

を満たすとする。また，除いた有限個の点 x_j においては f 及び f' に左極限、右極限が存在し，$f(x_j)$, $f'(x_j)$ を左右の極限値の平均値として定義するものとする。このとき，

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0) \quad - \quad & \lim_{T\to\infty} \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|<T} \tilde{f}(\rho) + \tilde{f}(1) \\ = \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left(f(n) + \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \right) + (\log 4\pi + \gamma) f(1) \\ + \quad & \int_1^{\infty} \left(f(x) + \frac{1}{x} f(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x} f(1) \right) \frac{dx}{x - x^{-1}} \end{aligned} \tag{8}$$

が成り立つ。ただし，左辺第 2 項の和は，リーマン・ゼータの非自明零点 ρ に渡る和であり、$\tilde{f}$ は f のメリン変換、$\Lambda(n)$ は n が素数 p のベキのときは $\log p$、それ以外の n では 0 となる関数、γ はオイラーの定数である。Weil は [16] において、この明示公式の有限体上の代数曲線 C における類似を発見した。それは Lefschetz 不動点定理を C 上のフロベニウス準同型に適用して得られた。すなわち，明示公式 (8) の左辺を C の l-進コホモロジー上に作用するフロベニウス自己同型の trace に，右辺をフロベニウス準同型の固定点の個数にそれぞれ対応させたのである。これはゼータの零点を作用素の固有値として解釈した初めての例であり，Hilbert-Polya が 1915 年に提案した「ゼータの零点を何らかの作用素の固有値として解釈することによりＲＨを解けないか」という哲学の一つの実現であった。

Weil はさらに，ある条件[1]を満たすような任意の f について明示公式の右辺が負になることが，ＲＨと同値であることを証明した。そして実際に右辺が負になることを Severi の代数的指数定理 [13] を用いて示したのである。

このように、素数分布という一つの特殊な話題から生まれたＲＨも、その後の研究の進展を経た今では、不動点定理や指数定理といった幅広い数学と深く関わっているのである。

[1] 正確な条件は Weil の原著 [16] あるいは Bombieri 氏の解説 [1] をご参照下さい。

5.2　間隔分布とランダム行列

ＲＨを証明するには，まずゼータの零点の意義を知る必要があるのではないだろうか。これまで見たＲＨの解決例から、ゼータの零点には見た目以上の深い意義が隠されているように思われる。

Montgomery は 1973 年，画期的な論文 [7] を発表した．リーマン・ゼータの零点どうしの差に渡るある和が，ある特殊な不等式を満たすことを証明したのである．それは零点の配列に何らかの法則性があることを物語っていた．そして彼はその論文で「リーマン・ゼータの零点の差の分布は，サイズの大きなエルミート行列をランダムに考えたときの，行列の固有値どうしの差の分布に似ているらしい」と予想したのである．この予想は Odlyzko の有名な数値計算 [8] により信頼を得，Montgomery-Odlyzko 法則（予想）と呼ばれるようになった。近年，Rudnick-Sarnak [10, 11] はこれを部分的に証明した。これについては [17] に詳しく述べたので本稿では省略するが、ランダム行列とゼータとの関係は，当初予想されていた Montgomery-Odlyzko 法則にとどまらず，大域モノドロミーという大きな哲学に広がりを見せている。これはゼータの個々の零点を固有値に対応させられるかどうかは別にして，全体的な傾向としての零点の配列がある種の無限次元群に支配されているらしいという不思議な現象である。ゼータの零点とは、私たちの想像を超えたものであるらしい。

5.3　究極の多様体

2.4 で述べた、セルバーグ・ゼータ $Z(s)$ がＲＨをほとんど満たすという事実は，ラプラシアン Δ の行列式による表示 ([12, 5]) から得られる。たとえば 2 次元の場合

$$Z(s) \times (\Gamma\text{-因子}) = \det(\Delta - s(1-s)) \times (\text{初等関数})$$

により零点が $s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$ （λ は Δ の固有値）となることによる。したがってセルバーグ・ゼータは Hilbert-Polya の哲学を実現したゼータであるといえる。もし，リーマン・ゼータを何らかの多様体のセルバーグ・ゼータと解釈することができれば，リーマン・ゼータのＲＨが解けるのかも知れない。そのような多様体があるとすれば，それは数論の未解決問題を知り尽くした究極の多様体であるに違いない。

参考文献

[1] E. Bombieri “Problems of the millennium: The Riemann Hypothesis”, http://www.claymath.org/prize_problems/riemann.htm

[2] J.B. Conrey, “More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta functions are on the critical line”, J. reine angew. Math. 399 (1989), 1-26

[3] P. Deligne, “La conjecture de Weil I” Publ. Math. IHES 43 (1974) 273-308

[4] P. Deligne, “La conjecture de Weil II” Publ. Math. IHES 52 (1980) 137-252

[5] S. Koyama “Determinant expression of Selberg zeta functions I” Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991) 149-168

[6] van de Lune, J., H.J.J. te Riele and D.T. Winter “On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip IV” Math. Comp. 46 (1986) 667-681

[7] H.L. Montgomery “The pair correlation of zeros of the zeta function” Proc. Symp. Pure Math XXIV (1973) 181-193

[8] A.M. Odlyzko “On the distribution of spacings between zeros of the zeta function.” Math. Comp. 48 (1987) 273-308

[9] B. Riemann “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”, Monat. der Königl. Peuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre (1859), 671-680

[10] Z. Rudnick and P. Sarnak “The n-level correlations of zeros of the zeta function” C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994) 1027-1032

[11] Z. Rudnick and P. Sarnak “Zeros of principal L-functions and random matrix theory” Duke Math. J. 81 (1996) 269-322

[12] P. Sarnak, “Determinants of the Laplacians” Comm. Math. Phys. 110 (1987) 113-120

[13] F. Severi, “Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica”, Math. Ann. 62 (1906) 194-225

[14] A. Weil, “Collected Papers, corrected 2nd printing”, Vol I, (1980) 280-298, Springer

[15] A. Weil, “Sur les courbes algébriques et les variété qui s’en déduisent,” Hermann, Paris, 1948

[16] A. Weil, “Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers” Collected Papers, corrected 2nd printing Vol. II, (1980) 48-61, Springer

[17] 小山信也「ゼータの零点とは」数学のたのしみ 19 (2000) 日本評論社