A SURVEY ON ZEROS OF ZETA FUNCTIONS

慶大理工 小山信也（Shin-ya Koyama）

Contents.

0. 間隔分布とは
1. リーマン・ゼータ (Rudnick-Sarnak 1994)
2. 合同ゼータ (Katz-Sarnak 1996)
3. “Global Monodromy” の実例
   (Katz-Sarnak 1996)
   (Iwaniec-Luo-Sarnak 1997)
4. 数論的応用
   (Iwaniec-Luo-Sarnak 1997)
   (Iwaniec-Sarnak 1997)

0. 間隔分布とは

本稿は、ゼータ関数の零点分布とランダム行列理論の関係に関するサーベイである。この研究は、９０年代後半から、プリンストン大学のサルナック氏を中心に行なわれ、目覚しい成果をあげてきた。興味の中心は零点の間隔分布である。ここでは間隔分布とは何かという基本的な事項を説明する。

$\lambda_0 \le \lambda_1 \le \cdots$ を実数列とし、$N(T) = \#\{j \mid \lambda_j \le T\}$ とおく。間隔分布を考える際には、λ_j を $N(T) \sim T \quad (T \to \infty)$ と正規化して考えることが多い。以下、断わりない限り、このように正規化した数列を考えるものとする。

ここで、測度を、以下のように定義する。

$$\mu(N) = \mu(\lambda_0, \cdots, \lambda_N)[a,b] = \frac{1}{N}\#\{0 \le j \le N-1 \mid \Delta_j \in [a,b]\}$$
$$\left(\Delta_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j\right)$$

これを、spacing distribution と呼ぶ。

例.

(1) 素数

p_j を j-番目の素数とする。素数定理により、正規化は$\lambda_j = \dfrac{p_j}{\log p_j}$ で与えられる。数値計算 [KS2, Figure 1] により、$\mu(N) \to e^{-x}dx.$ となっていることが観察されるが、現在のところ、こうした現象に対する証明は全く手がかりがない。このように、素数列のような素朴な数列ですら、間隔分布は全く謎である。

(2) リーマン・ゼータの零点

数値計算に関しては、リーマン予想を仮定して良いので、非自明零点を $\rho_j = \dfrac{1}{2} + \gamma_j\sqrt{-1}$ とおく。ここで、$0 < \gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots$ とする。正規化はリーマンにより、$\tilde{\gamma}_j = \dfrac{\gamma_j \log \gamma_j}{2\pi}$ であることが知られている。オドリズコ [O] による有名な数値計算で、spacing distribution $\mu(N)$ は GUE のそれに近付くことが観察される。この現象は、７０年代のモンゴメリによる先駆的研究がきっかけとなったため「モンゴメリ・オドリズコの法則」と呼ばれる。

1. リーマン・ゼータ関数

本節では、ルドニック・サルナック [RS] による、リーマン・ゼータの間隔分布に関する結果の解説を行なう。彼らの結果はリーマン予想を仮定していないが、ここでは説明の便宜のため、リーマン予想を仮定する。前節の例でも与えたように、正規化列として$\tilde{\gamma}_j = \frac{\gamma_j \log \gamma_j}{2\pi}$ を取る。最初の N 元の集合をを

$$B_N = \{\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_N\}$$

とおく。我々が知りたいのは、任意の $[a,b]$ に対して、

$$N(a,b) = \#\{k \mid \tilde{\gamma}_{k+1} - \tilde{\gamma}_k \in [a,b]\}$$

という量である。しかし、この量を直接扱うことには、一つの難点がある。それは、「連続する零点」という概念を、数学的にきちんととらえることが難しいことである。二つの零点が与えられた時、それらが連続しているかどうかは、それらをいくら見てもわからない。その間のすべての値を知って、はじめてその二つが連続しているかどうかが判定できるからである。そこでまず、連続するという条件を外し、「連続するとは限らないすべての二つの零点」に関して、

$$N_2 = N_2(a,b) = \#\{(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}') \in B_N^2 \mid \tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}',\ \ \tilde{\gamma}' - \tilde{\gamma} \in [a,b]\}$$

を考える。これが、もとの $N(a,b)$ とずれがあるとすれば、それは、二つの零点の間にさらに零点がある場合、すなわち、 $[a,b]$ 内に三つの零点がある場合である。つまり、そのずれは

$$N_3 = N_3(a,b) = \#\{(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'') \in B_N^3 \mid \tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}' < \tilde{\gamma}'',\ \ \tilde{\gamma}'' - \tilde{\gamma} \in [a,b]\}$$

から来る。このように、正整数 n に対し、整数 N_n を、n 個の数の組で最大のものと最小のものの差が $[a,b]$ に属するものの個数とおく。すると、帰納的に

$$N(a,b) = N_2 - N_3 + N_4 - \cdots$$

と、有限交代和で表される。従って、我々の目的のためには、N_n を $n = 2,3,4...$ に対して求めれば十分であることになる。

ルドニックとサルナックは、N_n を以下のように拡張した。

定義. *(n-level correlation)*

f を n 変数関数とする。*n-level correlation* を

$$R^{(n)}(f, B_N) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n) \\ \text{distinct}}} f(\tilde{\gamma}_{j_1}, ..., \tilde{\gamma}_{j_n})$$

と定義する。

特に、

$$f(\cdots) = \begin{cases} 1 & \max_k \tilde{\gamma}_{j_k} - \min_k \tilde{\gamma}_{j_k} \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

の場合、

$$R^{(n)}(f, B_N) = \frac{n!}{N} N_n.$$

となる。従って、n-level correlation は N_n の一般化になっている。以下、$R^{(n)}(f, B_N)$ について調べる。

ところで、f を一般の n 変数関数とするのは、あまりにも漠然としているので、もう少し、f に関する条件を考えてみると、以下の三つの条件が成り立つ場合を考えれば十分であることは容易にわかる。

(1) $f(x_1, ..., x_n)$ は、どの変数に対しても対称

(2) $f(x_1 + t, ..., x_n + t) = f(x_1, ..., x_n)$ for $t \in \mathbf{R}$.

(3) $f(x) \to 0$ rapidly as $|x| \to \infty$ in the hyperplane $\sum_j x_j = 0$.

第二の条件は、f が、変数同士の差にのみ依存する関数であることを表している。間隔すなわち差を調べるのが目的であるから、この条件は自然である。また第三の条件は、収束性のために必要であるが、超平面上に限って考えて良い理由は第二の条件による。例えば、第二の式で t を増大させた時は、値が変わらないから収束性を考える必要がないのである。

定理 **1 (Rudnick-Sarnak)[RS].** f が上記の三条件を満たすとする。さらに、*Fourier* 変換 $\hat{f}$ が

$$\mathrm{supp}(\hat{f}(\xi)) \subset \left\{ \sum_j |\xi_j| < 2 \right\}$$

を満たすと仮定する。このとき、$N \to \infty$ で

$$R^{(n)}(f, B_N) \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x) W_n(x) \delta\left(\tfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 ... dx_n$$

となる。ここで、$\delta(x)$ は 0 における *Dirac mass* であり、$W_n(x) = \det\left(\frac{\sin \pi(x_i - x_j)}{\pi(x_i - x_j)}\right)$ である。

証明の方針. リーマン・ゼータ関数の明示公式を用いる。明示公式は

$$\sum_{\substack{(j_1, \ldots, j_n) \\ \text{distinct}}} = \sum_{\substack{(p_1, \ldots, p_n) \\ \text{primes}}}$$

の形をした式であり、n-level correlation の定義は左辺の形をしているので、これを右辺の形、素数に渡る和に書き換える。そして、複雑な組合せ論的手法により、素数に渡る和を計算する。この計算はテクニカルであり、ゼータ関数とランダム行列が関係する神秘的現象の理由を、この証明から推測することはできないようである。 □

2. 合同ゼータ

本節では、カッツ・サルナック [KS] [KS2] の結果を紹介する。$C/\mathbf{F}_q$ を q 元体上の代数曲線とする。関数体を k とおく。合同ゼータ関数とは、

$$\zeta(C, T) = \prod_{v:\text{place of } k} \left(1 - T^{\deg(v)}\right)^{-1}.$$

で定義されるものである。以下の表示を持つことは，良く知られている。

$$\zeta(C, T) = \frac{P(C, T)}{(1 - T)(1 - qT)}$$

ここで P は次数 $2g$ の多項式であり、g は種数である。合同ゼータのリーマン予想は、P の任意の零点が $|T| = q^{-1/2}$ 上にあるという事実に相当し、ドゥリーニによって証明されている。そこで、その零点を $e^{i\theta_j} q^{-1/2}$ $(j = 1, 2, ..., 2g)$ とおく。我々の関心は、$\{\theta_j\}$ の間隔分布にある。零点は有限個しかないから、一見したところ、間隔分布に法則性など考えられないかに見えるが、ここで登場する新しい発想とは、一つのゼータだけを見るのではなく、曲線の族を考え、それに対するゼータ関数の族を考えるということである。

先ほど構成したように、零点の列から測度 μ_C を定義する。ゼータの族の中で、零点の個数が∞に近付くような列を取り、そこで、μ_C がある普遍的な測度に近付くというのが、彼らの主結果である。

まず、その普遍的な測度を構成する。ユニタリ行列 A に対し、その固有値からなる有限列を得る。それを用いて前述の方法で構成される測度をμ_A とおく。以下の補題は、普遍測度の存在を主張する。

補題 **(Katz-Sarnak).** ある測度 $\mu_{\mathrm{universal}}$ が存在し、任意の古典的コンパクト群（$G = U, SU, O, SO, USp$）に対し、

$$\lim_{N\to\infty}\int_{G(N)} \mu_A dA = \mu_{\mathrm{universal}}$$

となる。

一般に、二つの測度 μ と ν が与えられた時、

$$D(\mu,\nu) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\mu((-\infty,x] - \nu(-\infty,x])|$$

とおき、それらの測度の discrepancy と呼ぶ。$D(\mu,\nu) = 0$ であれば、二つの測度は本質的に等しいということになる。次の定理は、我々の測度 μ_C は、普遍測度にある意味で「収束する」ことを意味する。

定理 **2.** **(Katz-Sarnak).** $M_g(\mathbf{F}_q)$ を種数 g の曲線の同型類の集合とすると、

$$\lim_{\substack{g\to\infty\\ q\to\infty}} \frac{\displaystyle\sum_{C\in M_g(\mathbf{F}_q)} D(\mu_C, \mu_{\mathrm{universal}})}{\# M_g(\mathbf{F}_q)} = 0$$

証明の方針. 以下の三つの鍵を用いる。

(1) The monodromy group = full $Sp(2g)$.
(2) Equidistribution theorem of Deligne
(3) Law of large numbers

写像

$$M_g(\mathbf{F}_q) \ni C \to \text{Frobenius } \theta(C) \in USp(2g)$$

の全射性が、もっとも重要であり、非自明である。 □

3. "Global Monodromy" の実例

Global Monodromy というのは、数学的に定義されたものではない。我々が前節で、合同ゼータの例から学んだことは、一つのゼータを考えている限り、零点分布は

何も面白くないが、ゼータの族を考え、その中で極限を取ることにより法則性が現れる、という現象である。そして、その族をまとめ、性質を支配しているのが、モノドロミー群と呼ばれる群である。以上の現象は、標数正の世界（local な世界）において観察されたわけだが、この原理がリーマン・ゼータなどが属する通常の世界（global な世界）においてもあり得るのではないか、というのは、自然な発想である。実際、ドゥリーニが合同ゼータのリーマン予想を証明した際にも、一つのゼータ関数で証明したのではなく、ゼータのある族を考えて、その中で一気に証明したのであった。ごく単純に考えれば、本来のリーマン予想を証明するに当たっても、リーマン・ゼータを単体で見ていても何もわからず、それが属するようなゼータの族を考え、そのモノドロミー群を求めることにより、解決できる可能性があるのかも知れない。こうしたモノドロミー群が、global な場合に果たして存在するのか、それはまだわからない。しかし以下の結果は、ゼータ関数の族のいくつもの実例に関し、その中で極限を取った時の零点分布が、ある大きな行列群に関係した関数で表されるというものである。それは、global monodromy の存在を示唆しているとも考えられる。

まず、大雑把な意味で、ここでやりたいことを感覚的につかんでみたい。f を L-関数の源（例えば保型形式）とする。f のある族 $\mathcal{F}$ を考えたい。どのような族を考えるべきか、それを数学的に厳密に定義することは現段階ではできない。（しかし以下にいくつもの例をあげる。）族の元 $f \in \mathcal{F}$ に対し、f の導手と呼ばれる正の数が定義され、c_f と書かれるものとする。$\mathcal{F}_X = \{f \in \mathcal{F} \mid c_f \leq X\}$ とおく。$L(s,f)$ の非自明零点の集合を $\frac{1}{2} + i\gamma_f^{(j)}$ $(j = 1, 2, ...)$ とおく。リーマン予想を満たすような零点に対しては、 $\gamma_f^{(j)} \in \mathbf{R}$ である。そのような零点に対し、、$i \leq j$ のとき、$\gamma_f^{(i)} \leq \gamma_f^{(j)}$ とする。正規化を $\hat{\gamma}_f^{(j)} = \frac{\gamma_f^{(j)} \log c_f}{2\pi}$ とおく。我々の興味があるのは、

$$\mu_j(X, \mathcal{F})[a, b] = \frac{1}{|\mathcal{F}_X|} \#\{f \in \mathcal{F} \mid c_f \leq X, \hat{\gamma}_f^{(j)} \in [a, b]\}$$

$$W(X, \mathcal{F}, \phi) = \frac{1}{|\mathcal{F}_X|} \sum_{c_f \leq X} D(f, \phi)$$

の二つである。（前者は the distribution of the j-th lowest zero、後者は the density of low-lying zeros in $O(\frac{1}{\log c_f})$ である。）ただし、

$$D(f, \phi) = \sum_j \phi\left(\hat{\gamma}_f^{(j)}\right)$$

であり、 ϕ は $\mathbf{R}$ 上の急減少関数である。（リーマン予想を満たさないような零点、すなわち、$\gamma_f^{(j)}$ が実でない場合には、ϕ の値を 0 と考える。）

我々の希望は、ある $\mu_j(\mathcal{F})$ に対して

$$\mu_j(X, \mathcal{F}) \to \mu_j(\mathcal{F})$$

となることであり、また、ある $W(\mathcal{F})dx$ に対して $X \to \infty$ のとき

$$W(X,\mathcal{F},\phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)W(\mathcal{F})dx$$

となることである。

合同ゼータの場合には、カッツ・サルナックにより、$\mu_j(X,\mathcal{F})$ と $W(X,\mathcal{F},\phi)$ は、共に、モノドロミー群の極限で表された。こうした減少を global な場合にも証明することが目標となる。global な場合にモノドロミー群の定義はできないが、以下にいくつかの例をあげる。以下、説明のために、仮想的なモノドロミー群を"$G(\mathcal{F})$" と、引用符でくくって表す。

例 **1.**

$\mathcal{F} = \{\chi \mid$ 原始的指標 $\mathrm{mod}\ q,\ \chi^2 = 1\}$. このとき $L(s,f) = L(s,\chi)$ （Dirichlet L-function）となり、導手 $c_\chi = q$ は通常の意味と同一になる。

予想**.** "$G(\mathcal{F})$" $= Sp(\infty)$

この予想の根拠として、以下の定理がある。

定理 **3.1 (Katz-Sarnak).** $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-2,2)$ とすると、

$$W(X,\mathcal{F},\phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(Sp,x)dx$$

となる。ここで、 $\omega(Sp,x) = 1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$ である。

第二の根拠として、Rubinstein の数値実験がある [R]。彼は、$\nu_j(\mathcal{F},X)$ $(j=1,2)$ と $W(X,\mathcal{F})$ を $X \approx 10^{12}$ について調べ、上記予想に合致することを観察した。

例 **2.**

Δ を $SL_2(\mathbf{Z})$ の重さ 12 のカスプ形式とする。$\mathcal{F} = \{\Delta \otimes \chi \mid \chi \bmod q\}$ とする。L-関数として、

$$L(s,\Delta\otimes\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)\chi(n)}{n^{\frac{11}{2}+s}}.$$

を考える。この場合、$L(s,\Delta\otimes\chi)$ の関数等式の符合により、族はさらに二つの部分族に分けられる。それらを $\mathcal{F}^+$、$\mathcal{F}^-$ と書く。導手を $c_{\Delta\otimes\chi} = q^2$ とおく。

予想**.**

$$\text{“}G(\mathcal{F}^+)\text{”} = \lim_{n\to\infty} SO(2n)$$

$$\text{“}G(\mathcal{F}^-)\text{”} = \lim_{n\to\infty} SO(2n-1)$$

定理 **3.2 (Katz-Sarnak).** $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1)$ とする。$X \to \infty$ のとき、

$$W(X, \mathcal{F}^+, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(SO(even), x)dx.$$

$$W(X, \mathcal{F}^-, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(SO(odd), x)dx.$$

この場合も Rubinstein の数理計算 [R] がなされており、$\nu_j(X, \mathcal{F}^{\pm})$ $(j = 1, 2)$ と $W(X, \mathcal{F}^{\pm})$ が、$X \approx 10^6$ に対して上記予想と合致することが観察されている。

例 **3.**

$\mathcal{F} = \{f \mid$ 重さ k の正則ヘッケ固有カスプ形式 for $PSL(2, \mathbf{Z})\}$ とおき、保型L関数の族を考える。先ほどと同様に、二つの部分族 $\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-$ に分かれる。実際、符号は $k \equiv 0(4)$ の時は $+1$、$k \equiv 2(4)$ の時は-1 である。$c_f = k^2$ とおく。

予想**.**

$$\text{“}G(\mathcal{F}^+)\text{”} = \lim_{n \to \infty} SO(2n)$$
$$\text{“}G(\mathcal{F}^-)\text{”} = \lim_{n \to \infty} SO(2n-1)$$

定理 **3.3 (Iwaniec-Luo-Sarnak).** $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1)$ とする。$X \to \infty$ のとき、

$$W(X, \mathcal{F}^+, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(SO(even), x)dx$$

$$W(X, \mathcal{F}^-, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(SO(odd), x)dx$$

さらに、保型L関数のリーマン予想を仮定すると、$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-2,2)$ の下で同じ結論が成り立つ。

例 **4.**

$\mathcal{F} = \{f \mid$ 重さ k の正則カスプ形式 for $\Gamma_0(N)\}$ とする。ここでは、newforms のなす部分族 $H_k(N) = \{f \mid \text{new form}\} \subset \mathcal{F}$ に注目する。f の central character が自明であると仮定する。簡単のため、N が素数であるとする。$H_k(N)$ は、関数等式の符号により、さらに二つの部分族に分かれる。それらを $H_k^+(N), H_K^-(N)$ とおく。導手を $c_f = N$ とおく。

予想**.**

$$\text{“}G(\mathcal{F}^+)\text{”} = \text{“}G(\mathcal{H}_k^+(N))\text{”} = \lim_{n \to \infty} SO(2n).$$
$$\text{“}G(\mathcal{F}^-)\text{”} = \text{“}G(\mathcal{H}_k^-(N))\text{”} = \lim_{n \to \infty} SO(2n-1).$$

定理 **3.4 (Iwaniec-Luo-Sarnak).** $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1, 1)$ とすると、$X \to \infty$ のとき、

$$W(X, H_k^+(N), \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(SO(even), x)dx$$

$$W(X, H_k^-(N), \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(SO(odd), x)dx$$

さらに、保型L関数のリーマン予想を仮定すると、$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-2, 2)$ の下で同じ結論が成り立つ。

例 **5.**

$\mathcal{F} = \{\vee^2 f \mid f \in$ Example 3$\}$ とおく。ここでは symmetric squared L-functions $L(s, \vee^2 f)$ を考える。これは、GL_3 の自己双対カスプ形式 $\bar{f}$ に対する、$L(s, \bar{f})$ に等しい。従って、3次のオイラー積で表される。この意味で、これまでのどの例よりも本質的に高度な実例になっている。導手を $c_{\vee^2 f} = k^2$ とおく。

予想. "$G(\mathcal{F})$" $= Sp(\infty)$

定理 **3.5 (Iwaniec-Luo-Sarnak).** $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1, 1)$ とする。 $X \to \infty$ の時、

$$W(X, \mathcal{F}, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(Sp, x)dx$$

さらに、保型L関数のリーマン予想を仮定すると、$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ の下で同じ結論が成り立つ。

以上の実例により、以下の予想が考えられる。

Density Conjecture.

$W(X, \mathcal{F}, \phi)$ は、$\hat{\phi}$ に関する条件がなくても、個々に予想されている極限密度に収束するだろう。

4. 応用

例 4 の記号を用いる。Density Conjecture が正しければ、$X \to \infty$ の時に、以下が成り立つ。

$$\frac{\#\{f \in \mathcal{F} \mid c_f \leq X,\ \epsilon_f = 1,\ L(\frac{1}{2}, f) \neq 0\}}{\#\{f \in \mathcal{F} \mid c_f \leq X,\ \epsilon_f = 1\}} \to 1$$

Density Conjecture への部分的結果として、以下の定理があげられる。

定理 **4.1 (Iwaniec-Sarnak-Luo).** 保型Lに関するリーマン予想を仮定する。

$$\frac{\#\{f \in H_2^+(N) \mid L(\frac{1}{2}, f) \neq 0\}}{\#\{f \in H_2^+(N)\}} > \frac{9}{16}$$

定理 **4.2 (Iwaniec-Sarnak).**

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{f \in H_2^+(N) | L(\frac{1}{2}, f) \geq \frac{1}{(\log N)^2}\}}{\#\{f \in H_2^+(N)\}} \geq \frac{1}{2}$$

定理 **4.3 (Iwaniec-Sarnak).**
もし、定理 *4.2* が、右辺の $\frac{1}{2}$ を $C > \frac{1}{2}$ に置き換えて成立すれば、ジーゲル零点の非存在が証明できる。

References

[ILS] H. Iwaniec, W. Luo and P. Sarnak, *Low lying zeros of L-functions of modular forms* (preprint).

[IS] H. Iwaniec and P. Sarnak, *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Siegel zeros* (preprint).

[KS1] N. Katz and P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues and monodromy*, Colloquium Publications **45** (1999), AMS.

[KS2] N. Katz and P. Sarnak, *Zeros of zeta functions, their spacings and their spectral nature* (preprint).

[O] A. M. Odlyzko,, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function.*, Math. of Computation **48** (1987), 273-308.

[R] M. Rubinstein, *Evidence for a spectral interpretation of the zeros of L-functions*, thesis, Princeton University.

[RS] Z. Rudnick and P. Sarnak, *The n-level correlations of zeros of the zeta function,*, C. R. Acad. Sci. Paris **319** (1994), 1027-1032.

Dept of Math., Keio University, 223-8522 Japan