量子エルゴード性と素閉測地線定理

小山 信也

量子エルゴード性の応用の一つとして得られる、モジュラー面の素閉測地線定理の誤差項の改善について要約し、それを数論的コンパクト面に拡張した最近の結果について述べる。

本稿の流れは、以下のようである。

量子エルゴード性（QE）

$\Downarrow$ Section 1.

保型Ｌの mean-Lindelöf 予想

$\Downarrow$ Section 2.

素閉測地線定理の精密化（モジュラー面）

$\Downarrow$ Section 3.

素閉測地線定理の精密化（コンパクト面）

Section 1 では、量子エルゴード性を定義し、それがモジュラー面の場合に平均的に証明されていることを説明する。また、それより保型Ｌ関数のリンデレーフ予想が平均的に証明できることを示す。

Section 2 では、Section 1 の結果を用いて素閉測地線定理の誤差項の精密化が得られることを説明する。以上の結果は、Luo, Rudnick, Sarnak [2,3] によるものであ

り、全てモジュラー面に関するものであるが、これを合同部分群に拡張することは、最小固有値の評価さえ仮定すれば容易である。合同部分群の最小固有値に関しては、最近、彼ら自身による改善がなされた [2]。これにより、素閉測地線定理の誤差項の改善も、合同部分群に自明に拡張される。以上の証明は、アイゼンシュタイン級数、ポアンカレ級数、といった特殊な保型形式の性質に大きくよっている。したがって、カスプを持たないようなコンパクト面には、拡張が難しいと、彼らの論文 [3] の中で指摘されている。

Section 3 では、この問題を解決した。Jacquet-Langlands 対応をより正確に見ることにより、数論的コンパクト面のスペクトルがある合同部分群の newform の離散スペクトルに一致することを証明した。これにより、数論的コンパクト面に関する素閉測地線定理の誤差項の改善を、合同部分群のそれに帰着した。[1]

§1. QE ⇒ mean Lindelöf

本節を通じ、$M = PSL(2, \mathbf{Z})\backslash\mathbf{H}$ とおく。volume form を $dz = \dfrac{dxdy}{y^2}$ とおく。Δ を $L^2(M)$ 上のラプラシアンとし、その固有値を $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \uparrow \infty$、固有関数を ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2,... とおく。

これを用いて新しい測度 $d\mu_j := |\phi_j|^2 dz$ を定義する。量子エルゴード性（Quantum Ergodicity, QE）とは、以下のような性質のことである。

QE 予想.

$$\int_M f(z)dz = 0 \Longrightarrow \lim_{j\to\infty} \int_M f(z)d\mu_j = 0$$

これは、次の定理により、平均的に成立することが知られている。

定理. *(mean QE)(Luo-Sarnak 1994)*

$$\int_M f(z)dz = 0 \Longrightarrow \sum_{\lambda \leq \lambda} \left| \int_M f(z)d\mu_j \right|^2 \ll_{\epsilon,f} \lambda^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

すなわち、$\#\{\lambda_j \leq \lambda\} \sim \lambda$ より、平均的に

$$\left| \int_M f(z)d\mu_j \right| \ll \lambda_j^{-\frac{1}{4}}$$

となっている。

以下のリーマン・ゼータ関数に関するリンデレーフ予想は有名である。

リンデレーフ予想

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \ll_\epsilon t^\epsilon \quad (\forall\epsilon>0)$$

これに向けては、次の評価は良く知られている。

Convexity Bound

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \ll_\epsilon t^{\frac{1}{4}+\epsilon} \quad (\forall\epsilon>0)$$

(証明).

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束するため、その範囲では任意の垂直線上で有界。一方、$\mathrm{Re}(s)<0$ では、関数等式とスターリングの公式により、評価できる。残りの臨界領域について、Phragmen-Lindelöf の原理を用いて評価すると結論を得る。 $\square$

この証明からもわかるように、リンデレーフ予想と Convexity Bound は、関数等式を持つような任意のゼータ関数に関して、同様に考えられる。例えば、保型L関数

$$L(s,\phi_j)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_j(n)}{n^s}$$

の場合、関数等式の Γ 因子の形は

$$\Gamma\left(\frac{\sigma+it+i\sqrt{\lambda_j-\frac{1}{4}}}{2}\right)$$

のようになっている。したがって、t だけでなく λ_j に関する増大度も、全く同様にして考えることができる。このようにして、リンデレーフ予想の新しい aspect を考えることができる。

リンデレーフ予想(λ-aspect**)** $s=\frac{1}{2}+it$ を固定して

$$|L(s,\phi_j)| \ll_\epsilon \lambda_j^\epsilon \quad (\forall\epsilon>0).$$

更に、Rankin-Selberg L 関数

$$L(s,\phi_j\otimes\phi_j):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_j(n)|^2}{n^s}$$

についても同様の問題を考えることができる。

本節の主題は、（平均）量子エルゴード性を用いて、このリンデレーフ予想のλ-aspect が平均的に成立していることの証明を与えることである。

mean Lindelöf 予想（λ-aspect）.

$$\sum_{\lambda_j\le\lambda}|L(s,\phi_j\otimes\phi_j)|\ll\lambda^{1+\epsilon}$$

QE $\Longrightarrow$ mean Lindelöf の証明.

mean QE の式に

$$f(z)=E(z,s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\mathrm{Im}(\gamma z)^s$$

を代入すると、

$$\sum_{\lambda_j\le\lambda}\left|\int_{\Gamma\backslash H}E(z,s)|\phi_j(z)|^2dz\right|^2\ll\lambda^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

となる。ここで、左辺の積分は、

$$L(s,\phi_j\otimes\phi_j)\times\text{（ガンマ因子）}$$

の形になり、Stirling の公式によりガンマ因子を評価することで結論を得る。 □

§2 素測地線定理の精密化

$$\pi_M(x) = \#\{p : \text{素閉測地線}\, | N(p) = e^{l(p)} \leq x\}$$

$$\Psi(x) = \sum_{\substack{n:\text{geodesic} \\ N(n) \leq x}} \log N(p) \quad (n = p^e)$$

とおく。セルバーグ跡公式は、以下の形で用いる。

Trace Formula. $\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2$ とおくと

$$\Psi(x) = x + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{T} \sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} + O\left(\frac{x}{T} \log\log x\right)$$

まず自明な評価として、絶対値１のものを全て１に置き換えて項数で評価することにより、$\sum\limits_{|r_j|<T} x^{ir_j} \ll T^2$ となる。

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon})$$

を得る。この誤差項を改善することが本研究の主題である。すなわち、$\sum\limits_{|r_j|<T} x^{ir_j}$ の非自明な評価が目標である。

なお、予想は $\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ である。

この問題は非常に難しく、多少大がかりな道具を用いる必要がある。それは、以下の形をした Kuznetsov Formula というものである。

Kuznetsov Formula.

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(m)\overline{a_j(n)}h(r_j) + (\text{連続スペクトルの項})$$
$$= (\delta_{n,m}\text{-型の項}) + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n,m:c)}{c} \hat{h}\left(\frac{\sqrt{nm}}{c}\right)$$

ここで、$h(r_j)$ は test function であり、

$$S(n,m:c) = \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ 1\leq d \leq |c|}} e\left(\frac{nd + md^{-1}}{c}\right)$$

は Kloosterman 和 である。

これを用いることにより、Luo-Sarnak は誤差項の改善に成功した。

定理 (Luo-Sarnak[3])

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$$

証明の方針. Kuznetsov Formula で、$n = m$、$h(r_j) = \begin{cases} x^{ir_j} & |r_j| < T \\ 0 & |r_j| > T \end{cases}$ とおく。Kuzunetsov Formula の両辺を、$n < N$ に関して和を取ると、左辺第一項は

$$\begin{aligned}
&\sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} \sum_{n<N} |a_j(n)|^2 \\
&= N \sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} \\
&\quad + \sum_{|r_j|<T} x^{ir_j} \int_{(\frac{1}{2})} L(s, \phi_j \otimes \phi_j) \frac{N^s}{s} ds
\end{aligned}$$

となる。この右辺第二項は mean Lindelöf によってシビアな評価ができる。右辺第一項が評価したいものである。

一方、全体を Kuznetsov Formula の右辺により評価できる。この時、Kloosterman 和に関する Weil のシビアな評価を用いることにより、非自明な評価を得られる。以上を合わせて、右辺第一項が評価できる。 □

§3. コンパクト面への拡張

まず、数論的コンパクト面を四元数環から定義する方法を述べる。二整数 a, b を square-free, $(a, b) = 1$ とする。四元数環を

$$D = \left(\frac{a, b}{\mathbf{Q}}\right) = \langle 1, \omega, \Omega, \omega\Omega \rangle_{\mathbf{Q}}$$

とおく。ここで、$\omega^2 = a$、 $\Omega^2 = b$、 $\omega\Omega + \Omega\omega = 0$ である。D の元を

$$D \ni x = x_0 + x_1\omega + x_2\Omega + x_3\omega\Omega = \xi + \eta\Omega$$

と書く時、$\theta : D \to M_2(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$ を

$$\theta : x \mapsto \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ b\overline{\eta} & \overline{\xi} \end{pmatrix}$$

により定義する。

$R \subset D$ を maximal order とする。$R(1) = \{x \in R | x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = 1\}$ とおく。$\Gamma_D = \theta(R(1)) \subset PSL(2, \mathbf{R})$ とおくと、$M = \Gamma_D \backslash \mathbf{H}$ はコンパクトになる。コンパクト面と合同面に対し、固有関数同士の対応が知られている。

Jacquet-Langlands 対応.

$$\phi_j : \textit{wave form in } L^2(M) \longmapsto \overline{\phi_j} : \textit{wave form in } L^2(\Gamma_0(N) \backslash \mathbf{H})$$

この対応により固有値 λ_j は不変である。また、N は ϕ_j に対応する保型表現の conductor であり、N は j による。すなわち、コンパクト面を一つ固定しても、個々の固有値がそれぞれ別の合同面の固有値に対応している。

そこで私は、以下の定理を証明した。

定理. *(Koyama[1])*

$M = \Gamma_D \backslash \mathbf{H}$、$(a, b) = 1$、２が不分岐とするとき、

$$\pi_M(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$$

証明の方針

Lemma 1. 素数２が四元数環 D で不分岐であるとき、N は j によらない。（N は分岐素数の積）

Lemma 2.. 像 $\{\overline{\phi_j} | j = 0, 1, 2, \cdots\}$ は、$\Gamma_0(N)$ の *newform* の全体に一致する

Lemma1, Lemma 2 により、

$$\begin{aligned}\sum_{r_j \text{ for } M} x^{ir_j} &= \sum_{\substack{r_j \text{ for } \Gamma_0(N) \\ \text{newform}}} x^{ir_j} \\ &\ll \sum_{d|N} \sum_{r_j \text{ for } \Gamma_0(d)} x^{ir_j}\end{aligned}$$

最後の和は Luo-Sarnak[3] の場合に帰着する。 □

References

1. S. Koyama, *Prime geodesic theorem for arithmetic compact surfaces*, International Math Research Notices **8** (1998), Duke University, 383-388.
2. W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak,, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 387-401.
3. W. Luo and P. Sarnak,, *Quantum ergodicity of eigenfunctions on* $PSL_2(\mathbf{Z})\backslash H^2$, I.H.E.S **81** (1995), 207-237.