無限次元群の数論への応用

慶応義塾大学理工学部　　小山信也

e-mail: koyama@math.keio.ac.jp

0. 目的とあらまし

本稿の目的は、無限次元群が数論に応用される様子を概観しながら、後半部において、無限次元群のセルバーグゼータ関数に関する結果を報告することである。

本稿は第 I 部と第 II 部からなる。第 I 部は無限次元群の有限次元数論への応用である。従来の数論の枠内では得られなかった結果が無限次元群を用いて得られたり、これまで得られていた結果が、無限次元群を仲介させることで、より良い証明を与えられたりする例を見る。第 II 部は、無限次元群の無限次元数論への応用である。無限次元群自体の保型形式やセルバーグゼータ関数への試みを紹介する。

無限次元群を、次の 3 つのタイプに分けて考えることにする。

(1) linear type: $GL(\infty)$, $Sp(\infty)$, $O(\infty)$, 有限次元の極限としての無限次元群

(2) loop type: loop 群、current 群、Kac-Moody 群 (affine, hyperbolic)

(3) diffeo type: diffeo 群、universal Teichmuller modular 群

I. 有限次元数論への応用

I-1. Weyl の指標公式の一般化 (type (2))

Euler, Jacobi による古典的な仕事として、η-関数の展開公式がある。

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(2m+1)q^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

このような美しい展開式が存在するのは、左辺のべきが 3,8,10,14,15,21,24,... の時である。これは d が複素単純リー環の次元の場合であり、MacDonald([M]) はその場合に $\prod(1-q^n)^d$ の展開を得た。その際、重要な役割を果たしたのは、(一般化された) Weyl の分母公式である;

Weyl の分母公式の一般化

$$(*) \qquad \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e(-\alpha))^{\dim g^\alpha} = \sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e(w\rho-\rho)$$

ここに、記号は、次の通りである。A は l 次の generalized Cartan 行列であり、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ をその Kac-Moody Lie 環とする。通常の記号で、生成元を e_i, f_i, g_i とおく。W を Weyl 群、$\Delta(\Delta^+)$ を (正) ルートの全体とする。e は、$\Delta = \bigoplus_{i=1}^{l}\mathbb{Z}\alpha_i$ から環 $\mathbb{Z}[[\xi_1,...\xi_l]]$ への写像で、生成元 α_i を ξ_i に写すようなものである。$l(w) := \#(\Delta^+\cap w\Delta^-)$ であり, $\rho\in\Delta^+$ は $\rho(h_i)=1$ $(i=1,..,l)$ なるものである。Macdonald の方法は、(*) を affine Kac-Moody Lie 環に対して、具体的に計算するというものであった。このように、affine Kac-Moody という無限次元の対象を経由して、Euler, Jacobi の古典的な結果の統一的な解釈と、一般的な証明を得ることができたのである。

それでは、(*) を、更に無限度の高い、hyperbolic Kac-Moody に対して計算すると、何が得られるのだろうか？これを実行したのが、Feingold-Frenkel ([FnF]) である。彼らは、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

という、特別な hyperbolic 行列に関して、(*) を計算した。その結果、Euler, Jacobi, Macdonald の結果の 3 変数版 (2 次行列版) とも呼べる、次の結果を得た。

$$e^{2\pi i\mathrm{tr}(PZ)}\prod_{0\le N\in S_2(\mathbb{Z})}(1-e^{2\pi i\mathrm{tr}(NZ)})^{\mathrm{mult}(N)}\prod_{N\in\nu(\Delta_R^-)}(1-e^{2\pi i\mathrm{tr}(NZ)})$$

$$= \sum_{g\in PGL(2,\mathbb{Z})}\det(g)e^{2\pi i\mathrm{tr}(gP^tgZ)}$$

ここで、記号は、以下の通りである。Z は 2 次のジーゲル上半空間の元であり、$P = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$, $S_2(\mathbb{Z})$ は 2 次の整数成分の対称行列の集合、ν は Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ の dual $\mathfrak{h}^*$ から $S_2(\mathbb{C})$ への写像で、次で具体的に定義される。$\mathfrak{h}$ の基底 $\{h_i\}$ から $\mathfrak{h}^*$ の基底 $\{\alpha_i\}$ を $\alpha_i(h_j) = A_{ij}$ で決め、更に $\mathfrak{h}^*$ の基底 $\{\gamma_i\}$ を $\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{2}$, $\gamma_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$, $\gamma_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$ で定義する。これを用いて、$\mathfrak{h}^*$ の元 $\sum_{i=1}^{3} z_i\gamma_i$ の ν による像を、$\begin{pmatrix} z_3 & z_1/2 \\ z_1/2 & z_2 \end{pmatrix}$ と定義する。

[FnF] は、更に、ジーゲル保型形式の空間と Weyl 群不変なある種の指標の空間との間の同型を構成し、斉藤-黒川 lifting の別証を与えた。

I- 2 . ガロア群との関連 （ type (3) ）

$G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を求めようという試みが、Belyi([B])-Ihara-Drigne-Drinfel'd([D]) らによって行われており、G は Grothendieck-Teichmuller modular 群という type (3) の無限次元群に埋め込めると考えられている。

I- 3 . Langlands 予想との関連 (Drinfel'd のプログラム) (type (3))

「Langlands 予想の、標数が正の場合の証明が、type (3) の無限次元群を用いてできるだろう。」というプログラムが Drinfel'd によって提唱され、その第一段階が Feigin-Frenkel ([FgF]) によって証明されている。

I- 4 . Hasse-Weil ゼータの積分表示 （ type (2) ）

加藤和也氏によって１９８０年頃提唱された、「高次元体の Hasse-Weil ゼータ関数は、高次 K 群の上の積分で書けるだろう。」という予想が、無限次元群と Hasse-Weil ゼータとを結ぶきっかけになった。これまでの試みとしては、佐藤孝和氏による二次

元の場合（１９９１）がある。([Sa1],[Sa2])

II. 無限次元数論への応用

II-１. 無限変数のテータ関数（type (2) 及び $\mathbb{R}^\infty$ ）

McKean-Trubowitz ([MT]) による、種数∞のリーマン面（Hill 曲面）のテータ関数をここで紹介し、$Sp(\infty)$ の保型形式とみなせる可能性を探り、問題点を考えてみたい。はじめに、種数が１の場合のテータ関数を思い出してみる。テータ関数は

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n z + \pi i n^2 \tau}$$

で定義される。変数 z に関しては周期性

$$\theta(\tau, z+1) = \theta(\tau, z)$$

$$\theta(\tau, z+\tau) = e^{\pi i(-2z-\tau)}\theta(\tau, z)$$

が成立し、変数 τ に関しては変換公式

$$\theta(\tau, z) = \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-\pi i z^2/\tau}\theta(-\tau^{-1}, -\tau^{-1}z)$$

が成り立つ。次の表の $g=1$ の段には、n, z, τ の渡る範囲が記されており、その右には、テータ関数が τ の関数として $Sp(1)$ の保型形式であることが記されている。（$\mathfrak{H}$ は複素上半平面）この状況は一般の有限種数の場合も同様であり、τ が g 次のジーゲル上半空間を動き、テータ関数は $Sp(g)$ の保型形式になる。これを Hill 曲面の場合に比較したものが最下段である。K, H は後で定義するヒルベルト空間で、L は K の格子である。変数 τ に相当する変数 Q は、無限次ジーゲル上半空間の点として種数∞のリーマン面を与えると考えられるが、種数有限の場合と著しく異なるのは、Q

は種数∞のリーマン面をすべて表すのではなく、そのうちで Hill 型という、収束などが扱い安い特殊なもののみを動くということである。

	n	z	τ	τ の関数として modular form
$g=1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}$	$\mathfrak{h}$	$Sp(1)$
$g<\infty$	$\mathbb{Z}^g$	$\mathbb{C}^g$	$\mathfrak{h}_g$	$Sp(g)$
$g=\infty$	L	$K^*+\sqrt{-1}H^*$	$\mathfrak{h}_\infty$ の Hill 部分	$Sp(\infty)$?

そして、このように、一部分だけに制限したことが、変換公式を、そのままの形では成り立たなくしている。しかし、変換公式を測度の間に成り立つ関係という広い解釈で理解することにより、この場合もその類似を証明でき、その意味で $Sp(\infty)$ の保型形式とみなせる可能性が考えられる。これについては、後で説明する。ここで、Hill 曲面のテータ関数の正確な定義を与える。

実数体上の周期 1 でなめらかな実数値関数 $q(\xi)$ によって定まる作用素 $Q=-\frac{d^2}{d\xi^2}+q(\xi)$ を Hill 作用素という。Q の固有値の重複度は高々 2 であることが知られているが、簡単のため、すべての固有値が重複度 1 と仮定し、$\lambda_0<\lambda_1<\cdots\uparrow\infty$ とおく。二つのリーマン球面を区間 $(-\infty,\lambda_0)$, (λ_1,λ_2), ... で切れ目をいれ、同じ切れ目同士をくっつけると、種数が無限大のリーマン面を得る。これを Hill 曲面といい通常 S で表す。この曲面は hyperelliptic type であるから、$y^2=R_S(x)$ と、ある「x の無限次の多項式 R_S」(実際には無限積で定義される) を用いて表される。区間の長さを $l_n=\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ とおく。l_n は $n\to\infty$ で急減少する事が知られている。各区間に、tied spectrum と呼ばれる実数 $\mu_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ が定まる。この曲面 S のホモロジー群の生成元を、[MT] に従い、A_n,B_n $(n=1,2,3....)$ とおく。関数空間 K は複素数体上の正則関数 ϕ で、実数上では実数値を取り、次の評価を満たすものの全体とする。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\phi(\mu_n)|^2}{l_n^2}<\infty$$

K は、この不等式の左辺をノルムとするような内積により、ヒルベルト空間になる。K の dual K^* は、次の表示を持つことが知られている。

$$K^* = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n A_n \;\middle|\; x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{(nl_n)^2} < \infty \right\}$$

ただし、道の同値類 A_n は、それに沿って積分した値を対応させる関数と考えることで、dual space の元とみなしている。そこで、K^* の要素の係数 x_n を $\mathbb{Z}$ に同型な部分に制限することにより、格子 L^* を得る；

$$L^* = \langle m_n A_n \mid n = 1, 2, ... \rangle_{\mathbb{Z}}$$

ここで、m_n は、S の形から定まる、winding number と呼ばれる整数である。L^* の dual lattice を L と置く。L は K の格子で、$m_n A_n$ の dual basis を 1_n と置くと、

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} n_i 1_i \text{ (有限和)} \;\middle|\; n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

と書ける。また、$\mathbb{C}$ 上の正則関数 ϕ に対して Φ を $d\Phi = \frac{\phi}{R_S} d\lambda$ で定義し、微分形式の集合

$$H = \{ d\Phi;\ \sqrt{-1} \int_S d\Phi \wedge d\bar{\Phi} < \infty \}$$

を考えると、この収束条件は K の条件よりもゆるいことがわかり、K は H に埋め込まれる。H の定義に登場した積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_S d\Phi \wedge d\bar{\Phi} &= -4\sqrt{-1} \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\phi}{R_S} \right|^2 d(area) \\ &= 2\sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{\infty} n_i Q_{i,j} n_j \quad (Q_{ij} := B_i(1_j)) \\ &= 2\sqrt{-1} Q[n] \end{aligned}$$

と、通常の有限変数の二次形式の記法の類似で表すことができる。Hill 曲面のテータ関数は次で定義される。

$$\Theta(Q, z) := \sum_{\phi \in L} e^{2\pi\sqrt{-1} z(\phi) + \pi Q[n]}$$

ただし、変数 $z = x + \sqrt{-1}y$ は $x \in K^*, y \in H^*$ からなり、その範囲でテータは収束している。この定義に於いて、L の元 ϕ は $\mathbb{Z}$ の無限直和の元を渡るので、有限次元のテータ関数の類似になっている。また、「無限次行列」Q は、リーマン面 S を決めるごとに定まる変数で、有限次元の場合に於ける τ に（より正確には、$-\sqrt{-1}\tau$ に）対応すると考えられる。

変数 z に関して、次の周期性が成立し、有限次元の場合の拡張になっている。

$$\Theta(Q, z + A_n) = \Theta(Q, z)$$

$$\Theta(Q, z + B_n) = \Theta(Q, z) e^{\pi\sqrt{-1}(-2z(1_n) - B_n(1_n))}$$

変換公式については、そのままの形では成立しない。すなわち、種数 1 の場合の変換公式

$$\theta(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_n e^{-\frac{\pi(x-n)^2}{t}} \quad (\tau = \sqrt{-1}t)$$

の類似をそのまま計算した

$$\Theta(Q, x) = \mathrm{vol}(K^*/L^*) \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \sum_n e^{-\pi Q^{-1}[x+n]}$$

は $\mathrm{vol} = \infty$, $\det = \infty$ の為、意味をなさないフォーマルな式になってしまう。そこで、種数 1 の場合の変換公式を、

「$[0,1)$ 区間内の任意の可測集合 E 上で次の式が成立する；

$$\int_E \theta(\tau, x) dx = \sum_n P(E + n)$$ 」

と言う同値な命題に書き換えてみる。ただし、

$$dP(x) = \frac{e^{-\frac{\pi x^2}{t}}}{\sqrt{t}} dx$$

である。このように、変換公式を測度に関する等式として解釈し直すことにより、無限次元版への一般化が得られる；

「商空間 K^*/L^* 内の任意の可測集合 E に対して、

$$\int_E \Theta(Q,x)dx = P(I^{-1}(E))$$

が成り立つ。ここに、$I : \mathbb{R}^\infty \ni (x_i) \mapsto \sum x_i A_i \in K^*/L^*$ であり、$dP(x)$ は $\mathbb{R}^\infty$ 上のガウス測度である。」

無限次元版の変換公式がそのままの形で成立しないのは、初めに注意したように、変数 τ に相当する 変数 Q (あるいは S) が、無限次ジーゲル上半空間のごく一部である「Hill 部分」しか動けず、Q が Hill 部分に属しているとそれを変換した $-Q^{-1}$ は Hill 部分から外に出てしまうという事情によるのであろう。

無限次元群を扱う場合、保型形式やゼータ関数の類似を安直に作ると収束性が悪くなることが多い。それを回避するためには何らかの制限が必要であり、そのしわ寄せがどこかに生じて、しばしば有限次元そのままの一般化が成り立たなくなるように見える。しかし、元来の対象を無限次元と考えれば、逆に、有限次元の結果は一つの特殊な現れ方に過ぎず、無限次元の結果を通してこそ、初めて本質的な事実を理解できるのかも知れない。上の例で言えば、変換公式とは、測度の間に成り立つものとみなすのが普遍的であり、従来の大局的に書ききれる形のものは、有限次元の場合だけの系に過ぎないのかも知れない。そして、このように発想を転換させることが、無限次元の整数論への第一歩として、必要なのかもしれない。そうした意味に於いても、ここに紹介した、McKean-Trubowitz の仕事は、先駆的で示唆深いものに思われる。

II- 2 . 無限次元セルバーグ・ゼータ関数

a。ループ群のゼータ関数 ([K]) (type (2))

単位円周 S^1 から、$PSL(2,\mathbb{C})$ への滑らかな写像の全体に、一様収束位相を入れ、行き先の群での積を導入することにより、位相群構造を入れる。このような群をルー

プ群という。ループ群の離散部分群として、最も代表的で、かつ興味深いものは、多項式ループからなる群である。上の例では、$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}[T])$ が、変数 T に S^1 の元を代入することによって、ループ群の離散部分群にみなせる。この Γ のセルバーグ・ゼータ関数を定義することが本項の目的である。セルバーグ・ゼータ関数は、オイラー積で、次のような形をしたものである。

$$\zeta_\Gamma(s) = \prod_{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

ここで、$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ とは、Γ の素な双曲型共役類の全体であり、N ノルム関数で、各共役類に 1 より大きな実数を与える。共役類分割を行って、双曲型共役類を書き下し、ノルム関数の具体的な定義を与え、意味のありそうなゼータ関数を定義することが、本項の目的である。

こうした研究の原型となっているのは、セルバーグ ([Se1],[Se2]) による、$PSL(2, \mathbb{Z})$ の場合である。この場合、双曲型共役類は一次分数変換で実二次数を固定点に持つことから、双曲型共役類の全体は、$\mathbb{Q}$ 上の実二次体の全体と対応がつけられ、ノルムは、対応する二次体の基本単数を用いて記述される。

ループ群の場合も、この状況は類似している。すなわち、体 $\mathbb{Q}(T)$ の「実拡大」と言う概念が、$\mathbb{Q}$ の場合の自然な一般化になるように定義され、双曲型共役類の全体は、$\mathbb{Q}(T)$ 上の実二次体の全体と対応づけられる。しかし、この場合、同型な実二次体が無限個存在するので、ノルムを如何に定めようとも、収束するゼータ関数を得ることは難しい。そこで、$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ に、対応する実二次体が同型であるものを同値とするような同値関係を導入する。この同値類は、$\mathbb{Q}(T)$ 上の実二次拡大の同型類の全体と一対一に対応する。

ノルムも、$PSL(2, \mathbb{Z})$ の場合の自然な一般化になるように定義したい。基本単数は単数群すなわち一次 K 群の生成元であることに注目し、体の次元の上昇は、K 群

の次数の上昇に対応するという類体論からの示唆に従ってみるならば、次のような定義が得られる。

$$N(p) := \exp(\mathrm{vol}(\mathrm{Coker}(\mathrm{Reg}_p)))$$

ここで、Reg_p とは、p に対応する実二次体を関数体とするような超楕円曲線の同型類 C_p の二次 K 群 $K_2(C_p)$ から、ユークリッド空間への regulator map である。$PSL(2,\mathbb{Z})$ の場合には、一次 K 群の regulator map は log にほかならず、古典的なノルムの定義と一致する。

以上を用いて、$\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z}[T])$ のセルバーグ・ゼータ関数を形式的に次で定義する。

$$\zeta_\Gamma(s) := \prod_{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma)/\sim} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

双曲型共役類は、対応する超楕円曲線の種数によって分類される。すなわち、種数 g の超楕円曲線に対応する共役類たちのオイラー積への貢献を $\zeta_\Gamma^{(g)}(s)$ と書けば、ゼータ関数は

$$\zeta_\Gamma(s) = \prod_{g=1}^{\infty} \zeta_\Gamma^{(g)}(s)$$

と分解される。特に種数 1 の部分は、すべての楕円曲線 (の同型類) に渡るオイラー積であり、次の結果が成立する。

定理．谷山-*Weil* 予想、*Beilinson-Bloch* 予想を仮定すれば、$\zeta_\Gamma^{(1)}(s)$ は s の実部が十分大きいところで収束する。

証明の方針は、すべての楕円曲線に渡る、higher regulator の値の和を評価すれば良い。その際、谷山-Weil 予想により、すべての modular curve に渡る和を評価すれば良い。modular curve の場合、Beilinson-Bloch 予想によれば、higher regulator の値は $L-$ 関数の特殊値と導手を用いて表すことができ、それらの和は、式変形に

よる評価が可能な形になっている。仮定する事項と証明の詳細については、[K] を参照されたい。

なお、種数の高い場合についても、同様の仮定を設ければ種数ごとのゼータの収束は証明できると思われる。しかし、それらの種数に渡る無限積としての、群 Γ のゼータ関数の収束は、現状ではまったく不明である。

以上の方法に於いては、双曲型共役類の全体を同値関係で割ったことが、鍵になっている。これが前項でも述べた、無限次元群に関する関数を扱う為の制限に相当し、これによって、収束しそうなゼータ関数を取り出すことができたが、その一方では、跡公式との関係がつきにくくなったとの印象は免れない。ここでも、収束性を良くするための制限によるしわ寄せをどう回避するかが、無限次元群の関数を扱う上での問題となっている。

なお、ノルムの定義には、もう一つの方法がある。それは、行列の固有値をループ上で積分して、ノルムを得る方法である ([K])。しかし、その式は複雑であり、ゼータ関数の収束の可能性を占うことは現状ではできていない。

b。トンプソン群 ($\mathrm{Diff}(S^1)$ の部分群) の一般化 (type (3))

前項のループ群の場合には、離散部分群の代表的かつ興味深い例として多項式ループの群を考えた。しかし type (3) の群の場合は、数論的な意味のありそうな離散部分群 Γ を見つけることすら問題である。

この問題について、「トンプソン群に同型な部分群が、$\mathrm{Diff}(S^1)$ に存在する」という、Ghys-Sergiescu[GS] の結果がある。トンプソン群の専門家の中には、これは有限次元リー群とその数論的離散部分群の状況に類似していると考えている人もいる。本項の目的は、彼らの結果を、正標数の場合に拡張することである。もし本当にトン

プソン群が数論的に意味を持つならば、正標数類似が構成できるはずだからである。(たとえば、リーマン・ゼータを実現するようなセルバーグ・ゼータがあるのなら、その正標数類似が存在してセルバーグ・ゼータが合同ゼータになるはずである。)

R を整数環、K をその商体、F をそのアルキメデス素点による完備化とする。Ghys-Sergiescu は $R = \mathbb{Z},\ K = \mathbb{Q},\ F = \mathbb{R}$ の場合を扱っている。類似を構成したいのは $R = \mathbb{F}[T],\ K = \mathbb{F}(T),\ F = \mathbb{F}((T^{-1}))$ の場合である。($\mathbb{F}$ は有限体) 以下、この二つの場合に限って話を進めるが、これら以外の場合、例えば $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}),\ F = \mathbb{C}$、更に一般の代数体の整数環の場合にも、類似の結果は成立すると思われる。

まず、素元 π を、標数 0 の場合は 2 、標数正の場合は T と置いて固定する。局所化 $R' = R[1/\pi]$ と置く。general affine 群を次で定義する。

$$GA(R') := \left\{ x \longmapsto \pi^n x + \frac{p}{\pi^q}\ ;\ p \in R,\ q, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

群 Γ を、商集合 F/R 上の piecewise linear な同相写像 h の全体に、写像の合成で積を導入したものとする。ここで、同相写像 h が piecewise linear であるとは、F/R が有限個の閉集合たち I_n の和に書かれて、各 I_n 上では h が $GA(R')$ の元に等しいことを言う。この群 Γ は標数 0 の場合には、トンプソン群と呼ばれているものに一致する。次の定理が成り立つ。

定理. 商集合 F/R の自己同相写像 h が存在し、$h^{-1}\Gamma h$ が $\mathrm{Diff}(F/R)$ の部分群になる。

すなわち、正標数の場合にも、トンプソン群の類似が構成でき、それに同型な部分群が diffeo 群の中に存在する。

更に、従来のトンプソン群には、単純群であること、有限生成、有限表示を持つことなど、顕著な性質がみられるが、それらの性質が、正標数類似に於いても成立す

るのか否かは、今後の研究で明らかにされていくべきであろう。

References

[B] G. V. Belyĭ, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izv. **14** (1980), 247-256.

[D] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829-860.

[FgF] B. Feigin and E. Frenkel, *Duality in W-algebras*, International Math. Research Notes **6** (1991), Duke Math. J., 75-82.

[FnF] J. Feingold and I. B. Frenkel, *A Hyperbolic Kac-Moody Algebra and the Theory of Siegel Modular Forms of Genus 2*, Math. Ann. **263** (1983).

[GS] E. Ghys and V. Sergiescu, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes de cercle*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 185-239.

[K] S. Koyama, *Zeta functions of loop groups*, Advanced Studies in Pure Math. **21** (1992), 227-235.

[M] I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's η-function*, Inv. Math. **15** (1972), 91-143.

[MT] H. P. McKean and E. Trubowitz, *Hill's surfaces and their theta functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 1042-1085.

[Sa1] 佐藤孝和, 局所体上の *Wiener* 測度について, 数理解析研究所講究録 **792** (1992), 39-63.

[Sa2] ———, 局所体上の無限次元ベクトル空間の *Wiener* 測度, this volume (1992).

[Se1] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric Riemannian surfaces with applications to Dirichlet series*, J. Ind. Math. Soc. **20** (1956), 47-87.

[Se2] ———, *Harmonic Analysis*, Collected Papers **39**, 626-674.

Current address: Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ 08544-1000, U.S.A.