数論から見た跡公式

小山 信也 （慶應大）

1 導入

現代の数学においてゼータ関数の重要性は揺るぎないものとなりつつあるが、その根拠の一つは、素数定理や素測地線定理といった素元分布定理が、ゼータ関数の複素解析的性質に依っている点であろう。素数定理に関する「セルバーグの初等的証明」[19] を唯一の例外とすれば、現在知られている分布定理の証明には、必ずと言って良いほどゼータ関数が用いられる。また、ゼータ関数を用いない唯一の方法であるセルバーグの初等的証明においても、得られるのは第一項（主要項）のみであり、より詳しい分布（誤差項）を求めることはできない。誤差項はゼータ関数の零点を用いてのみ表されるのである。素元分布はゼータ関数の零点によって完全に記述される。

こうした分布定理は、跡公式（trace formula）もしくは解析数論で明示公式（explicit formula）と呼ばれる公式から導き出される。これらの公式はいずれも、素元（素数または素測地線・周期軌道）の全体に渡る和がゼータ関数の零点に渡る和に等しい、という内容であり、ゼータ関数が素元に渡るオイラー積であることに由来している。リーマン・ゼータ関数の明示公式はリーマンにより１９世紀に証明されたが、１９５６年、セルバーグ [20] は、素数の類似物である素測地線・周期軌道（セルバーグ・ゼータ関数）に対して類似の公式を発見した。この場合の明示公式は、ある積分作用素の跡（trace）を二通りに計算して等号で結んだ式であったため、跡公式とも呼ばれた。本稿では「ゼータ関数は究極的には一つである」との哲学（ゼータ統一理論 [5][11]）に従い、セルバーグ・ゼータ関数とリーマン・ゼータ関数を統括し、双方に関して跡公式という用語を用いる。

本稿では、跡公式の効用のうち特に分布定理に着目し、どのような式からどのような過程で分布定理が得られるのか、また、そこにゼータ関数がどのように関係しているのかを概観する。跡公式とは、上述のように

$$\sum_{p\in P}[\text{各 p の貢献（軌道積分）}] = \sum_{\rho:\ \text{零点}}[\text{各}\ \rho\ \text{の貢献（積分作用素の固有値）}]$$

というタイプの式である。右辺はゼータ関数の零点に渡る和であり、左辺の P は素元の集合を表す。素元とは、リーマン・ゼータ関数に対しては素数、セルバーグ・ゼータ関数に対しては素測地線・周期軌道のことである。

本稿の目標は、素数と素測地線の各々に対し、跡公式の両辺に現れる p と ρ の分布をそれぞれ概観し、最近の結果を報告することである。なお、p が素測地線である場合はそのノルム $N(p)=\exp(p\ \text{の長さ})$ の分布を興味の対象とする。§２は古典的な意味での分布（量的分布）に関する報告である。これは、x 以下の素元の個数 $\pi(x)$ や虚部が T 以下の零点の個数 $N(T)$ の x,T に関する漸近的挙動を求める問題である。古来、素元分布定理はこのような問題として考えられてきた。有名な素数定理もこの形をしている。しかし、$\pi(x)$ や $N(T)$ が同じであっても（例えば二つの分布でどちらも１００以下に１００個の元があったとしても）一方が等間隔な分布で、他方がランダム的にばらついた分布であれば、二つは全く違った様子に映るだろう。そこで§３では、元のばらつき具合を考慮した分布を考える。これは、§２の量的分布に対して、いわば質的分布とも呼べるものである。ばらつき具合の定式化には、元同士の間隔の分布から作られる測度を用いる方法や、ある種の指数和のキャンセレーションを評価する方法などがある。前者の方法は近年ランダム行列理論との関係が注目されており、サルナックら [18][7][8] により部分的に証明もなされてきている。また、後者の方法は跡公式により、§２の量的分布の精密化に関係する。素元分布定理の精密化を得る問題は完全な解決に至っていないが、最近、私は保型表現論における Jacquet-Langlands 対応を利用し、数論的コンパクト面の素測地線定理の誤差項の改善に成功した。[9] こうした最新の結果も報告しながら、素元分布とその周辺にまつわるサーベイを与えることが、本稿の目的である。

2　量的な分布

本節では量的な分布を考える。興味の中心は、$x, T \to \infty$ における

$$\pi(x) = \#\{p \in P \mid p < x\}$$

$$N(T) = \#\{\rho : \text{ zero} \mid |\mathrm{Im}(\rho)| < T\}$$

の挙動である。P が素数及び素測地線のそれぞれの場合に考えるが、素測地線はリーマン多様体が負定曲率で二次元の場合を扱う。

各 P に対し、$\pi(x)$ と $N(T)$ の各々をまとめたのが次表である。表中の文字 ε は、任意の ε > 0 についてその式が成立することを表す。また、$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$ である。$\mathrm{li}(x)$ については文献 [10] に詳しく述べた。

	$\pi(x)$	$N(T)$
素数	$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{e+\epsilon})$（注１）	$N(T) \sim \frac{2\pi T}{\log T}$
素測地線	$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1+e}{2}+\epsilon})$（注１）	$N(T) \sim CT^2$（注２）

注 1 e はリーマンあるいはセルバーグ・ゼータ関数の零点の実部の上限である。$\frac{1}{2} \leq e \leq 1$ であり、リーマン予想が正しければ $e = \frac{1}{2}$ である。素数の場合、リーマン・ゼータ関数に対し、e の値の改善は一切なされていない。従って、素数定理の誤差項は、現状では主要項と同じものしか得られていない。一方、素測地線の場合、ラプラシアンの最小固有値 λ_1 が *1/4* 以上であれば $e = \frac{1}{2}$ であり、そうでないときは $e = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_1}$ となる。

注 2 C は多様体を決めるごとに定まる定数である。

究極的な $\pi(x)$ の評価の予想は、素数、素測地線ともに $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}})$ である。上表は、ゼータ関数の零点の実部からわかる誤差項を表しているが、素数の場合は実部が完全に特定できれば究極的な素数定理が得られるのに対し、素測地線の場合は $e = \frac{1}{2}$ から得られる誤差項は $O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon})$ であり、予想には遠い。実際、素測地線の場合、零点の虚部の分布を詳しく見ることで、数論的なモデルに対して誤差項 $O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon})$ を改善することができる。以下、そうした改善のしくみを説明し、究極の分布定理に何が必要であるのかを考えてみたい。

分布定理の証明に用いられる跡公式は、以下のものである。

$$\Psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n) = x + \left| \sum_{\rho : |\mathrm{Im}(\rho)| < T} \frac{x^\rho}{T} \right| + O\left(\frac{x}{T} \log\log x\right)$$

左辺は $\Psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n)$ で定義される。$\Lambda(n)$ はマンゴルト関数であり、n が素元 p の冪であるときには $\log p$ または $\log N(p)$ を表し、それ以外の場合には 0 を表す。（素測地線の場合には「それ以外の場合」は存在しない。）このように定義された左辺は、ほぼ（$\log x$ のような小さな項を除いた x のオーダーとしては）$\pi(x)$ に等しいことが知られている。そこで、右辺を評価することが当面の目標となる。

右辺第一項は $\pi(x)$ の主要項を与え、誤差項は第二項と第三項から出る。式中の T は、第二項の和の範囲を表し、T が大きければそれだけ誤差としての第三項が小さくなることを意味している。逆に T が小さければ第二項は小さくなるが、第三項は大きくなる。従って、第二項と第三項が等しくなるような T が、全体として最小の誤差項を与える。そのような T を求めるため、第二項の和を評価してみよう。$e = \frac{1}{2}$ が成り立つ場合、$\rho = \frac{1}{2} + ir$ となり、第二項は

$$x^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{r : |r| < T} \frac{x^{ir}}{T} \right|$$

となる。ここで r に渡る和には大きなキャンセルが起きている可能性があるが、仮にキャンセルを一切考えず、$|x^{ir}| = 1$ と評価してみると、和に参加する r の個数は T^2 のオーダーであることから、第二項は $O(x^{\frac{1}{2}}T)$ となる。これが第三項と等しいオーダーになるのは $T = x^{\frac{1}{4}}$ の時であり、これより、上述の誤差項 $O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon})$ を得るのである。

以上の過程からわかるように、零点の虚部に渡る和 $\sum_{r:|r|<T} x^{ir}$ のキャンセルをどれだけ正確に抽出できるかが素測地線定理改善の鍵となる。そして、こうしたキャンセルの発生は、零点のばらつき具合によるものであることに注目すべきであろう。量的分布をより精密に求めようとした結果、質的分布が必然的に現れてきたのである。

和 $\sum_{r:|r|<T} x^{ir}$ のキャンセルを実際に得ることは一般には非常に難しい。これまでに得られていた例は、$SL(2,\mathbf{Z})$ を基本群とする面（モジュラー面）のみであった。初めて成功したのは Iwaniec[6] である。彼はセルバーグ・ゼータの零点（ラプラシアンのスペクトル）に渡る和を、種々の数論的な量（クルースターマン和や特殊関数の積分）で書き換える「クズネツォフ公式」[12] を用いて変形した。その際、保型Ｌ関数の値の新しい評価を用いた。これによって得た誤差項は $O(x^{\frac{35}{48}+\epsilon})$ であった。これを更に改善したのが Luo-Sarnak[14] である。彼らは数論的量子カオスの発展の中で、量子エルゴード性の証明の中で保型Ｌ関数の究極的な評価（平均リンデレーフ予想）を得ることに成功した。これを Iwaniec の方法と合わせることにより、誤差項 $O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$ を得た。以上の方法において、評価のポイントは保型Ｌ関数の非自明な評価を得る点にある。Ｌ関数の究極の評価はリンデレーフ予想（未解決）によって表され、Luo-Sarnak はそれ自身を証明せずにそれと同等な評価を与える式を証明して利用した。従って、ここで得られた誤差項をこれ以上改善することは（全く新しい方法を発見しない限り）不可能である。なお、以上の結果は $SL(2,\mathbf{Z})$ の合同部分群に関しても同様に成立する。証明にはクズネツォフ公式の合同部分群への一般化 [1][17] を利用すれば良い。

このように、これまでに知られているすべての証明は、ゼータ関数の零点に渡る和のキャンセレーションのためにクズネツォフ公式を必要とした。そして、クズネツォフ公式は元の多様体が非コンパクトの時しか存在しない。なぜなら、もともとクズネツォフ公式とは、二つのポアンカレ級数の内積を二通りの方法で計算して等号でつないだものであり、ポアンカレ級数とはカスプ（非コンパクト多様体の無限遠点）に応じて定義されるものだからである。従って、コンパクト多様体に対して素測地線定理の誤差項の改善をすることは困難であるとされてきた。この問題は [14] においても指摘されている。最近、私は数論的コンパクト面に関し、この問題を解決し、以下の定理を得た。

定理 1 a,b を、互いに素で平方因子を持たない二つの自然数とする。素数２が不分岐であるような四元数環 $\left(\frac{a,b}{\mathbf{Q}}\right)$ から定義される数論的コンパクト面に対し、以下が成立する。

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$$

四元数環からコンパクト面を定義する方法については [3] に詳しい。また、四元数環の一般論を学ぶには [22] が良い教科書である。証明は Jacquet-Langlands 対応 [2] 及びその explicit な表示 [4] による。これは数論的コンパクト面のラプラシアンの固有値を合同部分群に対する固有値に対応づけるものであるが、私は、この合同部分群が数論的コンパクト面のみにより、個々の固有値にはよらずに取れることを証明した。更に、その対応の像が newform と呼ばれる保型形式の全体に一致することを証明した。これにより、数論的コンパクト面の固有値の集合が合同部分群の場合に帰着され、クズネツォフ公式を newform に分解して考えることにより、定理を得た。なお、合同部分群に関してはモジュラー群のようにリーマン予想（$\frac{1}{4}$-固有値予想）が解決されているわけではないが、近年 Luo-Rudnick-Sarnak [13] によって３０年振りに更新された第一固有値の評価 $\lambda_1 \geq 0.21$ をリーマン予想の代わりに用いることにより証明が可能となった。

3　質的な分布（間隔分布）

本節では素元や零点（固有値）のばらつき具合を考える。ばらつき具合の定式化にはいろいろな方法が考えられる。一つの方法は前節で述べたような指数和のキャンセレーションを評価する方法である。本節ではもう一つの方法として、最近ランダム行列との関連で脚光を浴びている「間隔分布」を中心に考える。（以下の注意６では更に別の定式化である number variance を考える。）

正数列 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ の間隔分布を以下に定義する。量的分布には興味がないので、T 以下の元の個数が漸近

的に T 個であると正規化して良い。間隔分布は、$\mathbf{R}$ 上の測度として、

$$\mu(N)\ \left(=\mu(\lambda_0,\cdots,\lambda_N)[a,b]\right)=\frac{1}{N}\#\{0\leq j\leq N-1\mid\Delta_j\in[a,b]\}$$

$$\left(\Delta_j=\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)$$

で定義される。N を限りなく大きくした時、これがどんなモデルの測度に近づくかにより、その質的分布を表す。前節の量的分布が前世紀から考えられてきた古典的な問題であるのに対し、質的分布は７０年代以降になって初めて予想が提出された分野であり、今日に至るまで完全に証明されたものはない。次表は、前節と同様の各場合に関し、それらの質的分布の予想を表したものである。

	p または $N(p)$	ρ
素数	ランダム（注３）	GUE [18]（注５）
素測地線	全く不明（注４）	GOE, ポアソン [14]（注６）

注 3 p_j を j 番目の素数とする。素数定理により、素数列の正規化は $\lambda_j=\frac{p_j}{\log p_j}$ によってなされる。数値実験より、

$$\mu(N)\to e^{-x}dx$$

と予想される。（*[8] Figure 1*）これはランダム分布から得られる測度であり、これより素数はランダムであろうと思われる。

注 4 素測地線の長さの間隔分布は全く不明であり、予想すらない。ただし、多様体が数論的な場合は、測地線の長さが整数などの離散的な数で表されるため、そういう点に値が集中する。従って、ある長さの素測地線がたくさん重複して存在し、その近傍には全く存在しない、といった現象（*high degeneracy*）が起きる。

注 5 *[18]* ではリーマン予想を仮定していないが、ここでは簡単のためリーマン予想を仮定して説明する。リーマン・ゼータ関数の虚零点の列を $\rho_j=\frac{1}{2}+\gamma_j\sqrt{-1}$ $(0<\gamma_1\leq\gamma_2\leq\cdots)$ とおく。前節の表で与えた $N(T)$ により、正規化は $\tilde{\gamma}_j=\frac{\gamma_j\log\gamma_j}{2\pi}$ によってなされる。オドリズコ *[16]* のデータ（*[10]* 図５に転載）によれば、

$$\mu(N)\to\ \mathit{GUE}$$

と予想される。これは、*Montgomery-Odlyzko Law* と呼ばれている。*Rudnick-Sarnak* は、これを証明するには n-階相関関係

$$R^{(n)}(f,N)=\frac{1}{N}\sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\\ \text{各成分は異なる}}}f(\tilde{\gamma}_{j_1},...,\tilde{\gamma}_{j_n})$$

を考えれば良いことを見出した。ここに、f は n 変数関数であり、以下の条件を満たすものである。

1. $f(x_1,...,x_n)$ は対称式
2. 任意の $t\in\mathbf{R}$ に対し $f(x_1+t,...,x_n+t)=f(x_1,...,x_n)$
3. 超平面 $\sum_j x_j=0$ 上で $|x|\to\infty$ とした時、$f(x)\to 0$（急減少）

これらの条件の必然性及び、n 階相関関係が間隔分布を表す理由に関しては、*[10]* に詳しく述べたので、そちらを参照されたい。彼らの証明した定理は以下の通りである。

定理 2 *(Rudnick-Sarnak[18])* $\hat{f}$ をフーリエ変換とし、$\delta(x)$ を $x=0$ における *Dirac mass* とする。$W_n(x)=\det\left(\frac{\sin\pi(x_i-x_j)}{\pi(x_i-x_j)}\right)$ とおく。

$$\mathrm{supp}(\hat{f}(\xi))\subset\left\{\sum_j|\xi_j|<2\right\},$$

の下で、

$$R^{(n)}(f,B_N)\to\int_{\mathbf{R}^n}f(x)W_n(x)\delta\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1...dx_n\ \ (N\to\infty)$$

が成立する。

ここで仮定されているサポート条件が外せれば、Montgomery-Odlyzko law を証明できたことになるが、現在のところその見込みはない。しかし、この定理は理論的アプローチが難しいと思われていたこの問題に初めて数学的に近づいた結果であり、画期的なものである。

この定理の証明もまた、跡公式（explicit formula）によるものである。多変数版を考えることにより、容易に

$$\sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\\ \text{互いに異なる}}} = \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_n)\\ \text{素数の組}}}$$

というタイプの跡公式を得ることができる。n 階相関関係の定義式を、この跡公式を利用して素数に渡る和に書き換える。その後、非常に複雑な組み合わせ論的計算により、証明するのである。

注 6 ここでは *number variance*

$$\Sigma^2(\lambda, L) = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda}^{2\lambda} (N(x+L) - N(x) - L)^2\,dx$$

を考える。被積分関数は、積分区間内に存在する元の個数が平均からどれくらいずれているかを示すものであるから、関数 Σ^2 はばらつきを表す。これまでに知られてきたいろいろな多様体上のラプラシアンの固有値分布に対する Σ^2 は、以下の二つの分布のいずれかに合致していた。（グラフは *[21] Figure 2.18* にある。）

1. ポアソン分布

$$\Sigma^2(\lambda, L) = L$$

2. GOE

$$\Sigma^2(\lambda, L) = \frac{2}{\pi^2}\left(\log 2\pi L + \gamma + 1 - \frac{\pi^2}{8}\right) + O(L^{-1})$$

ところが、数論的な多様体に関しては、上記の二つの分布をまたがるような現象が観察された。*[21] Figure 2.19*（*[10]* 図２にイラスト化して転載）はそのような例を与える数論的多様体のデータであるが、原点付近でポアソンに従っていたグラフが次第にＧＯＥに従って行くことがわかる。これに関し、*Luo-Sarnak[15]* は初の理論的サポートを与えた。

定理 3 *(Luo-Sarnak[15])* 数論的な $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{R})$ に対し、$\frac{\sqrt{\lambda}}{\log\lambda} \ll \lambda \ll \sqrt{\lambda}$ の時

$$\overline{\Sigma^2}(\lambda, L) = \frac{1}{L}\int_0^L \Sigma^2(\lambda, \xi)d\xi \gg \frac{\sqrt{\lambda}}{(\log\lambda)^2}$$

系 4 $\frac{\sqrt{\lambda}}{\log\lambda} \sim L$ ならば、次が成り立つ。

$$\overline{\Sigma^2}(\lambda, L) \ll \frac{\sqrt{L}}{\log L}$$

ここで得られた評価はポアソンが満たすものであり、実験と一致する。もちろん、この評価は更に改善される余地があるし、上からの評価も未解決問題として残されている。

参考文献

[1] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, Invent. Math. 70 (1982/83) 219-288

[2] S. Gelbart , Automorphic forms on adele groups, Ann. Math Studies 83 (1975) Princeton Univ. Press

[3] I.M. Gel'fand, M.I. Graev and I.I. Pyatetskii-Shapiro, Representation theory and automorphic functions: W.V. Saunders Company, Philadelphia-London-Tronto, translated by K.A. Hirsch (1969)

[4] D. Hejhal , A classical approach to a well-known spectral correspondence on quaternion groups , Lecture Notes in Math, Springer 1135 (1985) 127-196

[5] 伊原康隆「素因子と共役類（１）」数学の歩み １２ (1967) 103-114

[6] H. Iwaniec, Prime geodesic theorem, J. Reine Angew. Math. 349 (1984) 136-159

[7] N. Katz and P. Sarnak The spacing distributions between zeros of zeta functions (preprint) (1996)

[8] N. Katz and P. Sarnak Zeros of zeta functions, their spacings and their spectral nature (preprint) (1997)

[9] S. Koyama, Prime geodesic theorem for arithmetic compact surfaces (preprint)

[10] 小山信也「ゼータ関数と量子カオス」数理科学９月号 (1997)

[11] 黒川信重「オイラー積の２５０年（下)」数学セミナー １０月号 (1988) 67-74

[12] N.V. Kuznetsov, Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums, Math. USSR Sb. 39 (1981) 299-342

[13] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, On Selberg's eigenvalue conjecture, Geom. Funct. Anal. 5 (1995) 387-401

[14] W. Luo and P. Sarnak, Quantum ergodicity of eigenfunctions on $PSL_2(\mathbf{Z})\backslash H^2$ 207-237 , I.H.E.S 81 (1995)

[15] W. Luo and P. Sarnak, Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces, Comm. Math. Phys. 161 (1994), 419-432

[16] A. M. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. Math. of Computation (1987) 273-308

[17] N.V. Proskurin, The summation formulas for general Kloosterman sums, J. Soviet Math. 18 (1982) 925-950

[18] Z. Rudnick and P. Sarnak, The n-level correlations of zeros of the zeta function, C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 1027-1032

[19] A. Selberg, An elementary proof of the prime-number theorem, Ann. of Math. 50 (1949) 305-313

[20] A. Selberg, Harmonic Analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Ind. Math. Soc. 20 (1956) 47-87

[21] P. Sarnak, Arithmetic quantum chaos, The Schur lectures (1992) (Tel Aviv), 183-236, Israel Math. Conf. Proc., 8. Bar-llan Univ., Ramat Gan, 1995

[22] M.F. Vignéras, Arithmétique des algèbres de quaternions, Lecture Notes in Math, Springer 800 (1980)