交流

# 量子カオスの数論的側面

小山信也　〈ケンブリッジ大学アイザック・ニュートン数理科学研究所　20 Clarkson Road, Cambridge, CB3 0EH, UK
e-mail: koyama@tmtv.ne.jp〉

数論，ゼータ関数論と量子カオス，ランダム行列理論の関わりについて概説する．前半部では量子カオスが数論的であるという意味，そして数論におけるスペクトルの重要性とその研究の方法について概説する．後半部では量子カオスの主要テーマである量子エルゴード性を解説し，それらが数論的多様体に関して解かれてきた歴史を振り返るとともに，最近の結果を報告する．また，ランダム行列理論と数論の関わりを，その端緒から振り返り，末節では最近の結果について述べる．

## 1. 数論の発展と量子カオス

本稿の目的は，量子カオスの数論的側面の概説である．「数論的量子カオス」(arithmetic quantum chaos) という言葉は，90年代前半に米国プリンストン大学数学科のピーター・サルナック (Peter Sarnak) により提唱された．数学において古くから主要な分野として認められてきた整数論，特にゼータ関数論に量子カオス的な意識を導入することにより，新たなる研究の方向を見出そうという試みである．

以来10年が経過し，その間この方向で数多くの研究成果が現れた．最近ではランダム行列理論が数論に深く関わっていることも確かめられてきている．数論的量子カオスは今もなお，整数論の一つの方向として位置づけられ進展が得られ続けている．これは数学，整数論の中心的話題であるゼータ関数論の自然な発展と捉えられる．

本稿では，数論的量子カオスの結果を概観すると同時に，物理学・量子力学的な考え方が数論・ゼータ関数論にどのように生かされているか，その不思議な類似性を概説したい．

## 2. 数論的量子カオスとは

そもそも量子カオスが「数論的」であるとはどういうことなのだろうか．量子力学において研究の対象とされる自己共役作用素とその固有状態について考えてみたい．

ここで細かな厳密性を犠牲にしていえば，自己共役作用素とは何らかの多様体上の関数空間に作用するラプラシアン（ハミルトニアン）であるとみなせる．量子カオスで扱う半古典極限 (semi-classical limit) はプランク定数を0に近づけた極限であるが，これは固有状態の言葉で表せば，固有値が無限大に近づいたときの極限 (large eigenvalue limit) と同値である．そこで，自己共役作用素が作用する関数空間として「数論的多様体上の 2 乗可積分な関数全体からなる空間（$L2$ 空間）」を考え，その上のラプラシアンの固有値が無限大に近づくときの様子を研究すること，これが数論的量子カオスである．すなわち，量子カオスが数論的であるとは，数論的多様体上の関数に作用するラプラシアンに絞って考察を行うことである．

## 3. 第一の双対性「基本群」

数学において重要な考え方の一つに「双対」がある．ゼータ関数の関数等式は，収束領域と発散領域という二つの世界をつないで補い合うものであるし，ゼータ関数を構成する際に用いられる群の表現や指標は，元の群をより深く理解するための道具として用いられる．双対とは，このように二つのものが見方を変えることで順次現れ，美しい関係を保ちながら互いに補い合っている状態を指す．

さて，多様体の双対的な概念として基本群がある．ドーナツ面（2 次元トーラス）は，平面を格子点全体のなす群（2 元生成自由アーベル群）で割ったものであるから，ドーナツ面の基本群は格子点全体のなす群である．このように，多様体は（曲率を適当に正規化すれば）平面や複素上半平面のような大きな空間（普遍被覆空間）を基本群で割った商空間とみなすことができる．この意味で，多様体と基本群は双対的な関係にあり，多様体を扱うことは基本群を扱うことと同値である．

多様体には曲率が定義されるが，計量を正規化して曲率が至るところ一定であるようにすると，曲率が正，負，0 の 3 通りの場合に分けられる．ここで話を簡単にするために 2 次元の場合を考えると，曲率の符号によって普遍被覆空間が定まる．曲率が正，負，0 の各場合に対して，それぞれ普遍被覆空間は球面，複素上半平面，ユークリッド平面となることが知られている．このうちカオス的な現象が起きるのは曲率が負の場合である．曲率が負の曲面は双曲曲面と呼ばれる．双曲曲面は数論的量子カオスにおける中心的な研究対象である．

基本群は，商が多様体になるようなものであるから，離散的な構造を持つ，典型的にはリー群の離散部分群であると考えてよい．すなわち，ひとことで言うならば群の各元は行列である．そこで全成分が整数であるような行列ばかりからなる群を「数論的」であるということにする．ただしここでいう整数とは，通常の有理整数のみならず，その

拡張である代数的整数や，四元数環の元で整数係数であるものなども含んだ広い意味である．そして，今定義した数論的群と共通の指数有限部分群を持つような群もまた数論的であると定義する．

もっとも典型的かつ重要な数論的群はモジュラー群 $SL(2, Z)$ である．これは有理整数を成分とする行列式 1 の 2 次行列の全体からなる群であり，リー群 $SL(2, R)$ の離散部分群である．

数論的な群の端的な特徴は，群の明示的な定義が与えられることである．多様体すなわち基本群の実例を構成することは一般には困難であり，もっとも単純と考えられるコンパクト・リーマン面の場合ですら，知られている基本群の実例の多くは数論的な構成によるものである．量子カオス的な現象を考察する際の数値計算によるアプローチや証明は，数論的な実例でなされる場合が多い．

なお，より正確に言えば，以上の説明は合同群と呼ばれる一部の特殊な数論的群に関するものである．合同群の場合には 9 節に述べるヘッケ作用素により様々な解析が可能となる．一般の数論的群に対しては，竹内喜佐雄（埼玉大）による特徴づけを用いることにより，いくつかの重要な結果が得られている．最近ではある種の非数論的な群に対して周期軌道の長さの重複度を解釈する試み (Bogomolny and Schmit: http://arxiv.org/abs/nlin.CD/0312057) なども行われているが，量子カオスにおけるこうした数論性の考察は竹内の特徴づけの上に立脚したものである．

数論的多様体に関する結果から，より一般的な現象が予想されたり，逆にそれまで信じられていた予想が覆されたりすることもある．一方，次節で述べるように，数論的多様体はスペクトルに関して非常に特殊な性質を持つと考えられており，数論的多様体に見られる現象のみによって一般的な予想を立てることには，危険な側面もある．

## 4.　第二の双対性「スペクトル」

前節で与えた 2 次元トーラスの実例では，基本群は格子点のなす群であった．このとき簡単な計算により，固有値は二つの平方数の和（の定数倍）として与えられることがわかる．すなわち，固有値分布は平方数和の分布と同一となる．これは，2 次元トーラスという目に見える図形から，その背後にある「平方数の和」という隠れた数列を見出したことを意味する．量子カオスが対象とする多くの多様体の場合，多様体そのものは抽象的で肉眼では見えにくいことが多い．そういう場合にも固有値列は数列として存在する．そしてその挙動は多様体の性質を反映していると考えられる．

数学者カッツ (Kac) による有名な問いかけ「太鼓の形を聞き分けられるか？」は，太鼓の音（すなわちスペクトル）を聞いただけで形（すなわち多様体）を求めることができるかという意味である．この問いがきっかけとなり多くの研究が生まれた．現在のところ信じられている予想では，スペクトルは必ずしも一意的に多様体を決定するわけではないが，それに近いことが成立していると信じられている．より正確には，2 次元リーマン面の場合には等しいスペクトルを持つ多様体は有限個しかなく，一般次元においてもそれらの集合はコンパクトであると考えられている．

説明が前後したが，スペクトルとは固有値を拡張した概念である．固有値とスペクトルは，多様体がコンパクトならほぼ同じである．スペクトルには離散と連続の 2 種類があり，離散スペクトルは固有値と同じと考えてよい．連続スペクトルは，固有方程式を満たす点では固有値と同じであるが，固有関数が 2 乗可積分でないために固有値とみなされないものである．

多様体がコンパクトな場合には，固有値すなわち離散スペクトルの存在は保証されており，連続スペクトルは存在しない．これに対し非コンパクトな場合，固有値の存在が証明されているのは数論的多様体のみであり，これはセルバーグ (Selberg) の1950年代の研究による．セルバーグはこの結果から，一般の多様体に関しても固有値が同様に存在するであろうと予想した．

この予想の正否を決定する問題は未解決であるが，離散と連続のスペクトルを合わせたスペクトル全体に関しては存在が証明されており，固有値の個数に相当する概念を連続スペクトルに拡張することにより，スペクトルの総量も具体的に求められている．その内訳に関するサルナックの1980年代の予想と，それ以降の多くの数学者の研究により，現在では，非数論的な多様体では固有値は存在しない（あるいは存在したとしても非常に少ない）と考えられている．すなわち，セルバーグの予想は誤りであり，セルバーグの証明した結果は数論的多様体という特殊な対象に対する結果に過ぎず，一般的な現象ではなかったということである．

このことは，数論的多様体から全体を予測することは危険であるという事実を表す一方，スペクトルの挙動が多様体の数論性を反映していることを意味する．すなわち，ラプラシアンの固有値はその存在自体が数論に根差したものである．そのため量子力学のみならず整数論にとって固有状態は重要な研究対象となりうるのである．

## 5.　ゼータ関数の零点と素数分布

整数論でスペクトルが重要であることには，より直接的な理由が存在する．それは，スペクトルがゼータ関数の零点とみなされるからである．本節では，なぜゼータ関数の零点が重要なのかについて解説する．以下，本節ではゼータ関数といえばリーマン・ゼータ関数（数式 1）を指すも

のとする．

$\mathrm{Re}(s)>1$ における定義，

$$\zeta(s)=\prod_{p:\,素数}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

ゼータ関数は素数にわたる無限積として表される．これを「オイラー積」という．この無限積表示を因数分解形と比較すると，

(零点にわたる積)＝(素数にわたる積)

という式を得ることができる．したがって，両辺の対数をとれば

(零点にわたる和)＝(素数にわたる和)

の形になる．この両辺を微分し，そこに適当な試験関数を乗じて，ゼータ関数の零点を囲むような積分路に沿って複素積分を行えば，左辺は各零点を 1 位の極に持ち，その重複度を留数に持つ．したがってコーシーの積分定理により再び「零点にわたる和」の形に書け，和の内容は試験関数に零点を代入したものとなる．一方，右辺を各素数にわたり計算したものは積分変換の形になっており，ちょうど試験関数のフーリエ変換に素数を代入したものとなる．このようにして

(試験関数に零点を代入したものの和)

＝(そのフーリエ変換に素数を代入したものの和)

という式を得る．これは解析数論において明示公式と呼ばれている有名な公式である．この公式は，ゼータ関数の零点と素数の関係を表したものであり，以下に述べるように素数分布論に重要な応用がある．

まず，試験関数として，そのフーリエ変換の値が $x$ 以下の素数に対しては 1, $x$ を超える素数に対しては 0 となるようなものを選ぶことにより，明示公式の右辺は「$x$ 以下の素数の個数」を表すことになる．これは解析数論でしばしば $\pi(x)$ と書かれるものである．仮にすべての $x$ に対して $\pi(x)$ の値が分かれば素数分布を完全に決定できることから，$\pi(x)$ は素数に関するあらゆる未解決問題を含んだ重要な関数であるといえる．したがって，明示公式の右辺として $\pi(x)$ が得られたことは画期的なことであり，左辺を存分に計算することで素数に関する未知の性質が解明されることが期待できる．

左辺は素数と無関係に定義されているので，ゼータ関数の零点の分布に関する性質を知ればそれに応じた結果が得られる．現在知られている零点の性質は，実部が 1 未満ということだけである．このことから素数定理（$x$ 以下の素数の個数はおおむね $x/\log x$ 個であるという漸近的な事実）が得られる．

なお，この $x/\log x$ という式は，より精密には対数積分 $\mathrm{li}(x)$ により表され，その主要項のみを部分積分により取り出したものが $x/\log x$ である．対数積分 $\mathrm{li}(x)$ は $x$ のべきとしては $x$ の 1 乗に最も近い．したがってその誤差項，すなわち $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$ は $x$ の 1 未満のべきとなるはずであるが，その指数の値は知られていない．明示公式を用いて，この誤差項をゼータ関数の零点たちを用いて具体的に表すことができる．特に，零点の実部の上限（最大値）は，誤差項の指数を与えることがわかる．この値が 1/2 であろうという主張がリーマン予想であり，これは実部が 0 と 1 の間にある全ての零点の実部が 1/2 であることを意味している．

## 6.　ゼータ関数の零点とスペクトル

一方，多様体に関してもゼータ関数が定義される．前節のゼータ関数（リーマン・ゼータ関数）に対して，多様体のゼータ関数はセルバーグ・ゼータ関数と呼ばれオイラー積で定義されるが，素数の代わりに多様体の素測地線あるいは周期軌道，または基本群の素共役類をわたる（これらを総称して素元と呼ぶ）．ここで素測地線とは閉測地線のうち一周だけのものであり，素共役類とは他の共役類のべき乗になっていない共役類のことである．セルバーグ・ゼータ関数の場合，ゼータ関数の定義に先立って，多様体の調和解析を用いて跡公式を証明できる．これは

(スペクトルにわたる和)＝(素元にわたる和)

という形をした公式である．これは前節の明示公式と似た形をしている．そこで，この跡公式から先のプロセスを逆にたどることにより，右辺からセルバーグ・ゼータ関数の定義式（オイラー積）を得ることができ，それによってセルバーグ・ゼータ関数の解析接続や関数等式を得ることができる．その際，左辺がスペクトルにわたる和の形をしていることから，得られるセルバーグ・ゼータ関数の因数分解形はスペクトルにわたる積の形となる．すなわち，セルバーグ・ゼータ関数の零点はスペクトルと対応がつき，それらの関係を完全に書き下すことができる．

このようにセルバーグ・ゼータ関数は，調和解析や跡公式を用いてその性質が証明できることが特徴である．リーマン・ゼータ関数が整数や素数といった身近なものから作られ，収束性や解析接続などが直接証明されるのに対し，セルバーグ・ゼータ関数は，多様体が抽象的でその定義から直接は何も分からないだけに，跡公式が唯一かつ強力な道具となる．これはリーマン・ゼータ関数に比べ一見難解で回りくどいように見えるかもしれないが，零点がスペクトルによって書き下せるということは，零点の本質的な意義が分かることであり，それこそがリーマン・ゼータ関数について未解明な問題なのである．したがって，スペクトルを用いて零点を解釈するという方法がリーマン・ゼータ関数に示唆を与えると考えられるのである．

さて，セルバーグ・ゼータ関数の零点がスペクトルに対応することはすでに述べたが，そのうち離散スペクトルに

対応するものに関しては，（有限個の例外を除き）零点の実部が 1/2 であることが示される．これはセルバーグ・ゼータ関数についてリーマン予想がほぼ成立していることを意味する．すなわち，ゼータ関数の零点をスペクトルに結びつけることができれば，リーマン予想は解決されるだろうとの希望が湧く．

実際，1900年に提出された有名な「ヒルベルトの問題」において，ヒルベルトは第八問題として素数の分布に関する未解決問題を挙げており，その解決にはリーマン予想の証明が重要であること，そしてゼータ関数の零点をスペクトルとして解釈することへの可能性を指摘している．当時は跡公式が知られておらず，ヒルベルトの考えは素朴なものであったと思われるが，その時代から零点とスペクトルの関係が指摘されていたことは注目すべきであろう．

## 7. 量子エルゴード性

数論的量子カオスで得られている諸結果のうち主要なものとして量子エルゴード性が挙げられる．エルゴード性とは極限的な均一性，一様性を意味する数学用語である．たとえば，ある図形上の軌道がエルゴード的であるとは，時間が十分に経過すればどの点の十分近くをも必ず通ることを意味する．反対の概念は「周期的」であり，この場合は同じ軌道を繰り返すのでいくら時間が経過しても通る点は限られている．

量子エルゴード性とは，こうした極限的な均一性を固有関数の値分布に関して表した用語である．時間の代わりに固有値あるいはスペクトルを考える．そして多様体の代わりに固有関数の値分布を考えるのである．固有値あるいはスペクトルを無限大に飛ばしたとき，固有関数の値分布が限りなく均一に近づくことを，量子エルゴード的であるという．これはどのような値分布の振舞を意味しているのだろうか．以下に説明する．

値分布が均一であるとは，定数関数のように至るところ一定の値を取ることではないかと，直感的には感じられる．それは確かにその通りであり，仮に定数関数に近づくような固有関数の列が存在すれば，それを量子エルゴード的であると言ってよい．しかし，現実にはそのような列は存在しない．なぜならば，定数関数は微分して 0 であるから，ラプラシアンの固有関数で固有値 0 である．一方，一般論で知られているように，2 乗可積分な関数のなすヒルベルト空間の正規直交基底を，ラプラシアンの固有関数たちによって構成することができる．すなわち，定数関数以外の任意の固有関数は，定数関数と直交する．したがって固有値を無限大に飛ばしても固有関数が定数関数に近づくことはありえないのである．それでは量子エルゴード性が成立する場合の固有関数は，いったいどのような値分布に近づくのだろうか．その答えは，至るところ十分密に十分急激な変動をするような関数，すなわち，定数関数の対極にある状態なのである．

量子エルゴード性の定義を正確に述べるには，多様体を配図空間 (configuration space) とする運動量相空間 (momentum phase space) あるいは単位接球面束 (unit tangent sphere bundle) に拡張する必要がある．これらの空間は，多様体の点とその点における運動量ベクトルの組からなり，その上の関数に作用する擬微分作用素を用いて量子エルゴード性は記述される．それには多くの数学的概念の導入が必要であるので，ここでは厳密な定義は述べない．しかし，数論的量子カオスの中心的題材である双曲曲面においては，量子エルゴード性のより素朴な定義が存在するので，以下それについて解説する．

双曲曲面における素朴な意味での量子エルゴード性とは，固有関数の絶対値の 2 乗を多様体の測度に乗じたものが，多様体の元来の（何も乗じない）測度に弱収束することであると定義される．すなわち，スペクトルを無限大に飛ばすと，固有関数の絶対値の 2 乗をかけてから積分しても，かけずに積分しても同じ値になるということである．この定義は運動量を無視し，元の多様体上の挙動のみを考えているので，厳密な意味での量子エルゴード性よりも弱いが，双曲曲面においては，厳密な定義とほぼ同値であることが知られている．

ではこの素朴な定義は，固有関数のどのような振舞を意味するのであろうか．仮に固有関数が定数関数に近づけば明らかにこの性質は成立するが，先に述べたようにそれは起きえない．すると，この性質が成立するのは固有関数が至るところで十分密な変動をすることを示していることが以下のようにして分かる．

たとえば固有関数が十分密な変動をしない領域があったとする．そこでは変動が十分密でないから，十分小さな領域の上では固有関数がある一定以上の値を持つ．可積分関数としてこの領域上で大きな値を持つものを選べば，積分値はある程度以上に大きくなってしまう．その関数を単に積分するよりも，一定以上の値をかけている分だけ積分値が大きくなってしまうのである．したがって，十分密な変動がないような状況では量子エルゴード性は成立しえない．

逆に，固有関数が固有値を無限大に飛ばした際，至るところ十分密に変動するような極限的な様子を呈すると仮定する．この場合，積分領域を細かく分けて考えると，その細かな領域の中においてさえ固有関数は十分密に変動するため，至るところで値の大きな部分と小さな部分とが十分密に現れる．一方，可積分関数の方は固定しているため，積分領域を十分細かく分ければその上での変動は小さい．したがって固有関数をかけて積分すると，十分に平均化さ

れた値が得られることが分かる．

固有値が増大したときに固有関数が至るところで十分細かな変動をすることが，量子エルゴード性なのである．

## 8. 量子一意エルゴード性

量子カオスで大きな議論の対象となったものにスカーリング (scarring) がある．固有関数の絶対値が大きくなる領域が，半古典極限を取った際にある周期軌道に収束するような現象のことである．ヘラー (Heller) は1980年代半ば，いくつかの固有関数の値分布を計算し，固有関数が大きな絶対値を持つような領域が，時折，意味のありそうな形状をなすことを発見した．

この印象的な計算結果は図示され1984年に出版されているので目にされた方も多かろう．それらの図では固有関数の値が大きくなるような領域が黒く塗られている．各固有値に対して一つの図が描かれ，いくつかの固有値に対する図が掲載されている．それらを見ると確かに何枚かの図においては，ある周期軌道の周辺が黒くなっている．ヘラーはこの現象に意義を見出そうとした．量子力学において，固有関数の絶対値は確率振幅を表す．この値が大きいということは，確率が大きいということである．一方，周期軌道は古典力学において質点が運動する経路である．これらに関連性があるとしたら，量子力学と古典力学の不思議な整合性が半古典極限において見られることになる．これは大変興味深いではないか，というわけである．

このスカーリングと前節で述べた量子エルゴード性を比較すると，互いに相反する概念であることに気づく．量子エルゴード性が値分布のランダム性を主張する内容であるのに対し，スカーリングは値分布が意義のある偏りを呈することを意味しているからである．この二つの概念の比較をよりはっきりさせ，どちらが正しいのかを考察するためには，固有値を無限大に飛ばす際の極限の取り方をより注意深くする必要がある．こうして以下に述べるような量子一意エルゴード性の概念に到達する．

前節で述べた 2 種類の量子エルゴード性は，いずれの定義においても数式を用いて正確に表すと，固有値にわたる平均値を用いて記述される．すなわち，固有関数の値が至るところ緊密に変動するという現象が，多数派の固有値に対して成立していれば量子エルゴード的として認められる．たとえば百番目，千番目，一万番目と，桁が変わるたびに非常に偏った値分布を持つ固有関数が繰り返し登場するような場合でも，残りの固有関数たちが十分に緊密な値分布に近づくのであれば量子エルゴード的である．これに対し，個々の固有関数の値分布が平均を取らなくてもエルゴード的になるとき，量子一意エルゴード的であるという．厳密性を犠牲にして大まかな議論をするならば，固有値を無限大に飛ばす際に，固有値の部分列を適当に選んで無限大に飛ばしても良いのが量子エルゴード性，部分列を選ぶことなく，全固有値列で極限を取るのが量子一意エルゴード性である．

以上のように概念を区別すると，量子エルゴード性とスカーリングは両立しうるが，量子一意エルゴード性とスカーリングは両立しえないことが分かる．スカーリングを実現するような固有値列は全固有値列の部分列であり，それが量子エルゴード性を実現する部分列と異なる列であれば，双方が成立することは十分にありうるのである．これに対し，量子一意エルゴード性とスカーリングは両立しえない．

私が現在勤務しているケンブリッジ大学に，量子カオスの創始者の一人であるボヒガス (Bohigas) が滞在している．ボヒガスによれば，スカーリングの存在問題は，量子カオスの中心的な問題の一つであり，専門家を 2 派に分かった議論が展開されてきたという．そして，今もなお決着を見たとはいえないだろうとのことである．

## 9. 数論的多様体に関する結果

スカーリングの非存在が初めて証明されたのは，ルドニック (Rudnick) とサルナックによる1994年の共著論文においてであった．彼らは 2 次元および 3 次元の数論的多様体（合同型）に対し，スカーリングの非存在を証明した．この結果は当時，ヘラーをはじめとするスカーリングの信奉者たちに衝撃を与えたとされている．

固有関数（数論でいう保型形式）の空間に整数でパラメタライズされたヘッケ作用素と呼ばれるラプラシアンと可換な作用素が作用し，ラプラシアンの固有関数を全ての整数に関するヘッケ作用素の同時固有関数として取り直す（いわゆる同時対角化を行う）ことにより，様々な解析が可能となる．このヘッケ理論は合同型と呼ばれる一部の特殊な（しかし典型的な）数論的多様体に対してのみ存在する．数論的多様体において強力な結果が得られる理由は，すべてヘッケ作用素の力にあるといっても過言ではない．

その後1995年にルオ (Luo) とサルナックの共著論文により，2 次元の合同型多様体（合同面）に対する量子一意エルゴード性が連続スペクトルに関して証明され，2000年に筆者により 3 次元に拡張された．これらの証明にはヘッケ作用素から作られるゼータ関数（保型 $L$ 関数）の評価を用いる．量子一意エルゴード性の成立は，ゼータ関数の非自明な評価の成立と同値であり，それはまさに整数論の中心的未解決問題であるリーマン予想に直結した問題だったのである．この点も，整数論と量子カオスの不思議な関係の現れであると強く認識されるべきであろう．

一方，離散スペクトルに関しては，量子一意エルゴード性の証明は困難と思われていたが，2003年，リンデンシュ

トラス (Lindenstrass) によりついに 2 次元合同型コンパクト面の場合に証明がなされた．方法はゼータ関数を用いるものではなく，当初のルドニックとサルナックの証明に立ち返り，ヘッケ理論のみを用いるものであった．

## 10. ランダム行列理論（1995年以前）

1971年のある午後，アメリカのプリンストン高等研究所のティールームで，著名な整数論研究者であったチャウラ (Chowla) が，整数論の若手モンゴメリー (Montgomery) を物理学者のダイソン (Dyson) に紹介した．この日ここで交わされた雑談が，後に整数論の大きな流れを作る発見へとつながる．ダイソンは，当時ランダム行列 GUE モデル（ガウス型ユニタリアンサンブル）の固有値対の相関関係を研究しており，その密度分布の数式をモンゴメリーに示した．モンゴメリーはリーマン・ゼータ関数の零点対の間隔分布やその一般化である相関関係を研究していたが，自分が得ていた密度関数が，ダイソンの示した GUE 固有値分布の関数とそっくりであることに気づいた．これが，その後の整数論と量子力学をつなぐ端緒となった出会い，そして発見の瞬間であった．

モンゴメリーは翌年この発見を論文にまとめ，予想を公表した．その後オドリツコ (Odlyzko) はゼータ関数の 7,000 万個の零点を計算し，モンゴメリーの予想を検証した．結果は完璧な一致を呈した．

この予想は，ゼータ関数の零点をスペクトルで表すというヒルベルトの哲学を受け継いでいるとはいえ，個々の零点が固有値に対応するわけではなく，全体として分布の様子が同じになることを主張する．したがってこの法則が仮に証明されても，それがリーマン予想の解明に役立つか否かは疑問である．しかしながら，ゼータ関数の零点の正体を求める問題はリーマン予想も含んだ大問題であり，ランダム行列理論はそれに向けて大きな示唆を与えてくれるであろうと考えられている．

モンゴメリーの予想に対する進展は永らく見られなかったが，1994年，ルドニックとサルナックは共著論文においてこの問題に対する初の進展を遂げた．彼らの定理はモンゴメリーの予想を一般的な試験関数に対するものと捉え，それをある条件を付した試験関数に限って証明したものであった．モンゴメリーの予想を証明するには試験関数が任意の区間の特性関数でなくてはならなかったが，彼らによって付された条件は特性関数が満たさないものであったため，モンゴメリーの予想が証明されたことにはならない．しかしこの結果はゼータ関数とランダム行列理論の関係に初の理論的証明を与えたという点で画期的であった．

以上の考察はゼータ関数を固定した上でなされたが，ゼータ関数を族の中で動かして考えることにより，別のランダム行列モデルが現れることが，カッツとサルナックにより発見された．ゼータ関数がある種の族をわたったとき，限られた範囲の零点分布がどうなるか，という問題である．これはモンゴメリーの考えていた「虚部」という変数を，整数論で現れる様々なパラメーターに取り替えた問題といえる．ゼータ関数の族の例としては，ディリクレ指標の族（ディリクレ $L$ 関数），保型形式の族（保型 $L$ 関数）などがあり，それぞれ GSpE（Gaussian Symplectic Ensemble，ガウス型シンプレクティックアンサンブル）や GOE（Gaussian Orthogonal Ensemble，ガウス型直交アンサンブル）など，固有のモデルに対応することが分かっている．

こうして，ゼータ関数の零点がランダム行列の固有値と同じ分布を呈することは，1995年までに疑いようのない事実となっていた．

## 11. ランダム行列理論（1996年以降）

ランダム行列とゼータ関数の不思議な関係が解明されつつあった1996年，米国のシアトルでリーマン予想研究集会（通称 RH1）が行われた．そこでサルナックは数理物理学者のキーティング (Keating) に対し「係数42を，ランダム行列理論を用いて説明できるか？」と質問した．これはその後の旋風の発端となる歴史的な問いかけであった．

ここで「係数42」について説明する．ゼータ関数の臨界線上の値を評価することは，リーマン予想に直結する主要な問題である．それにはゼータ関数の絶対値を何乗かし（通常この指数を $2k$ で表す），その値の平均値（臨界線上で虚部が 0 から $T$ までわたった積分値）を $T$ の式で表す．その主要項の係数（を適当な因子で割って正規化したもの）がここでいう「係数」である．この係数は $k$ の値によって決まる．$k$ の値が大きいほど難しい．$k=1$ のとき係数が 1 であることはハーディ (Hardy) とリトルウッド (Littlewood) による1918年の古典的な結果である．$k=2$ のときの係数が 2 であることはイングハム (Ingham) により1926年に証明された．3 以上の $k$ に対して係数を求めることは未解決であるが，コンリー (Conrey) とゴーシュ (Ghosh) は近似関数等式などゼータ関数論で知られている道具を利用し，$k=3$ の係数が42であることを予想したのである．このときコンリーは「$k=4$ 以上に対する推測は困難であろう．たとえ推測できたとしても，とてつもない数値になるに違いない」と言っている．1, 2, 42 という数列は，規則性を見抜くにはあまりにも短かった．しかし，当時の数論ではそれ以上の計算も予想も困難だったのである．

この42という数値をランダム行列理論で意義づけることが，サルナックがキーティングに投げかけた質問であった．それは一般の $k$ に対する公式を得るための唯一の手がかりに思われた．キーティングは以下の結論に達した．「ゼ

ータ関数の零点が行列$A$の固有値のようなものだとすれば，ゼータ関数の値は特性多項式 $\det(I-A)$ のようなものだろう．もしこれが事実なら，ゼータ関数の平均値は特性多項式の平均値に関係があるだろう.」他ならぬこの特性多項式の平均値こそ，ランダム行列理論によって計算される量だったのである．

彼は弟子のスネイス (Snaith) とともにその計算に取りかかった．その結果 2 年後，特性多項式の 3 次ユニタリ群にわたる平均値が42であることが確かめられたのである．そして1998年，オーストリアのウィーンで開催されるリーマン予想研究集会（通称 RH2）にて，その結果を発表することになった．

一方，42 を発見したコンリーはその間，ゴネック (Gonek) とともに$k=4$に取りかかり，$k=4$の係数が 24024 であろうとの予想に到達していた．これは前述の近似関数等式に加え円周法 (circle method) という難解な解析数論の手法を駆使した非常に複雑なものであった．そしてこの結果もキーティング–スネイスと同じく RH2 で発表されることになったのである．

RH2 の会場，シュレディンガー研究所に着いたコンリーは，プログラムを見てキーティング–スネイスが42の意義づけに成功したことを知る．そして，その新理論が 24024 と一致するかどうかに興味を持った．キーティングがこの理論を構築したのは42を説明することが目的であったから，意識的にせよ無意識的にせよ，42という結果に合うような理論を選択していたことになる．この理論が次の数値 24024 と整合する確証はなかった．逆にいえば仮に結果が一致すれば，それはまさにランダム行列とゼータ関数の関係に確固たる根拠を与えるものとなる．

コンリーはキーティングの到着を待った．ところがキーティングは都合で遅れ，結局，会場に到着したのが自分の講演の15分前というタイミングであった．コンリーは急いで彼に駆け寄り，$k=4$ の係数が 24024 になることを伝えた．驚いたキーティングは計算結果（数式 2）を取り出し，急いで計算を始めた．全員が固唾を飲む中，コンリーとキーティングは16の階乗，割る 2 の 2 乗，3 の 3 乗…7 の 1 乗と会場の黒板で計算を続け，キーティングの講演開始 2 分前にようやく終わった．結果は 24024 であった．かくしてキーティングとスネイスは，ランダム行列特性多項式の平均値公式を発表し，その値が $k=3$ の42のみならず $k=4$ の 24024 まで一致することを公表したのである．

このキーティング–スネイスの公式では $k=1, 2, 3$ に対して 1, 2, 42となることが確かめられていた．

$$\frac{k^2!}{1^1 2^2 3^3 \cdots k^k (k+1)^{k-1} (k+2)^{k-2} \cdots (2k-1)}. \tag{2}$$

これが端緒となり，その後，ゼータ関数の平均値とランダム行列の特性多項式の関係について，種々の結果が得られている．その多くは2000年以降になされた仕事であり，論文も未出版のものが多い．前節で述べた零点の間隔分布を第一ステージとすれば，零点のみならず全ての値を考慮に入れた1996年以降は，ランダム行列とゼータ関数の関係における第二ステージと呼べるだろう．

表 1　ランダム行列理論による予想値と$\zeta$の 6 乗平均値．$\zeta$の 6 乗平均値は Mathematica による．

| 積分区間 | 予想 | $\zeta$の平均値 | 比 |
|---|---|---|---|
| [0, 50000] | 7236872972.7 | 7231005642.3 | .999189 |
| [50000, 100000] | 15696470555.3 | 15723919113.6 | 1.001749 |
| [100000, 150000] | 21568672884.1 | 21536840937.9 | .998524 |
| [150000, 200000] | 26381397608.2 | 26246250354.1 | .994877 |
| [200000, 250000] | 30556177136.5 | 30692229217.8 | 1.004453 |
| [250000, 300000] | 34290291841.0 | 34414329738.9 | 1.003617 |
| [300000, 350000] | 37695829854.3 | 37683495193.0 | .999673 |
| [350000, 400000] | 40843941365.7 | 40566252008.5 | .993201 |
| [400000, 450000] | 43783216365.2 | 43907511751.1 | 1.002839 |
| [450000, 500000] | 46548617846.7 | 46531247056.9 | .999627 |
| [500000, 550000] | 49166313161.9 | 49136264678.2 | .999389 |
| [550000, 600000] | 51656498739.2 | 51744796875.0 | 1.001709 |
| [600000, 650000] | 54035153255.1 | 53962410634.2 | .998654 |
| [650000, 700000] | 56315178564.8 | 56541799179.3 | 1.004024 |
| [700000, 750000] | 58507171421.6 | 58365383245.2 | .997577 |
| [750000, 800000] | 60619962488.2 | 60870809317.1 | 1.004138 |
| [800000, 850000] | 62661003164.6 | 62765220708.6 | 1.001663 |
| [850000, 900000] | 64636649728.0 | 64227164326.1 | .993665 |
| [900000, 950000] | 66552376294.2 | 65994874052.2 | .991623 |
| [950000, 1000000] | 68412937271.4 | 68961125079.8 | 1.008013 |
| [1000000, 1050000] | 70222493232.7 | 70233393177.0 | 1.000155 |
| [1050000, 1100000] | 71984709805.4 | 72919426905.7 | 1.012985 |
| [1100000, 1150000] | 73702836332.4 | 72567024812.4 | .984589 |
| [1150000, 1200000] | 75379769148.4 | 76267763314.7 | 1.011780 |
| [1200000, 1250000] | 77018102997.5 | 76750297112.6 | .996523 |
| [1250000, 1300000] | 78620173202.6 | 78315210623.9 | .996121 |
| [1300000, 1350000] | 80188090542.5 | 80320710380.9 | 1.001654 |
| [1350000, 1400000] | 81723770322.2 | 80767881132.6 | .988303 |
| [1400000, 1450000] | 83228956776.3 | 83782957374.3 | 1.006656 |
| [0, 2350000] | 3317437762612.4 | 3317496016044.9 | 1.000017 |

表 2　$L(1/2,\chi_d)^k$ の$-1{,}000{,}000<d<0$ にわたる平均値と理論値．

| $k$ | 実際の平均値 | 理論値（予想） | 比 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1460861.8 | 1460891. | 0.99998 |
| 2 | 17225813.8 | 17226897.5 | 0.999937 |
| 3 | 316065502.1 | 316107868.6 | 0.999866 |
| 4 | 7378585496. | 7380357447.1 | 0.99976 |
| 5 | 198754711593.6 | 198809762196.4 | 0.999723 |
| 6 | 5876732216291.7 | 5877354317291.3 | 0.999894 |
| 7 | 185524225881950. | 185451557119001. | 1.000392 |
| 8 | 6149876164696600 | 6141908614344770 | 1.0013 |

表 3　$L(1/2,\chi_d)^k$ の $0<d<1{,}000{,}000$ にわたる平均値と理論値．

| $k$ | 実際の平均値 | 理論値（予想） | 比 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1144563.5 | 1144535.5 | 1.000024 |
| 2 | 9252479.6 | 9252229.9 | 1.000027 |
| 3 | 109917867.0 | 109917367.9 | 1.0000045 |
| 4 | 1622521963.4 | 1622508843.4 | 1.0000081 |
| 5 | 27321430060. | 27320230686. | 1.000043 |
| 6 | 501621762060.6 | 501542204848.7 | 1.000159 |
| 7 | 9787833470714.1 | 9783848274459.6 | 1.000407 |
| 8 | 199831160877919 | 199664775232854 | 1.000833 |

表4　$L_{11}(1/2,\chi_d)^k$ の $-85{,}000{,}000<d<0$, $d=2, 6, 7, 8, 10 \pmod{11}$ にわたる平均値と理論値.

| $k$ | 実際の平均値 | 理論値（予想） | 比 |
|---|---|---|---|
| 1 | 14628043.5 | 14628305. | 0.99998 |
| 2 | 100242348.8 | 100263216. | 0.9998 |
| 3 | 1584067116.8 | 1587623419. | 0.998 |
| 4 | 41674900434.9 | 41989559937. | 0.993 |

最後に，ゼータ関数の平均値とランダム行列理論値の数値例を挙げる．表1はリーマン・ゼータ関数の6乗平均値とランダム行列理論値との比較である．それらの比がほとんど1に近いことが見てとれる．表2と表3は，ディリクレの $L$ 関数（リーマン・ゼータ関数に指標をつけてひねったゼータ関数）を判別式 $d$ の2次体の指標により $d$ でパラメタライズした上での $d$ にわたる平均値である．表題では $|d|$ が100万未満での平均となっているが，正確には85万未満で1倍，100万以上で0倍を算入し，その間を滑らかな減少関数でつなぐことにより，より自然な平均値を算出している（平均値・理論値とも）．表4はレベル11，重さ2のカスプ形式から得られる保型 $L$ 関数を表2のようにディリクレ指標でひねり，同様の平均を取ったものである．いずれも右欄の比が1に近いことが分かる．

なお，本節において解説を行ったランダム行列の特性多項式とゼータ関数の挙動の関係は，ブレザン (Brézin)–氷上 (Hikami) とキーティング–スネイスにより独立に発見されたものである．ブレザン–氷上の共著論文はキーティング–スネイスの論文と同時に Communications in Mathematical Physics 誌の214巻（2000年）1号に掲載された．論文では，キーティングがCUEモデル (Circular Unitary Ensemble) に対して数式1を得たのが最初であり，ブレザン–氷上はそれを他のモデルに一般化したとされているが，彼らがキーティングの研究を知る以前にかなりの結果を得ていたことは想像に難くない．本稿は，交流欄の趣旨を踏まえ，筆者の専門の数論という立場から見える範囲に限っての解説としたため，キーティングらのエピソードを主として取り上げたが，ブレザン–氷上の研究も同時期に独立に行われていたことをここに強調するものである．

本稿の作成を通じ，多くの人々に情報やデータを提供していただいた．特に以下の人々にお礼を述べて結びとしたい．

I would like to express my profound gratitude to: S. O. Bohigas, Brian Conrey, Jon Keating, Nina Snaith, Zeev Rudnick, Steven Gonek, Mike Rubinstein, David Farmer and Chris Hughes.

### 非会員著者の紹介

小山信也氏：　プリンストン大学研究員，慶應大学助教授などを経てケンブリッジ大学アイザック・ニュートン研究所給費研究員．専門は整数論．

（2004年3月18日原稿受付）

### Arithmetic Aspects of Quantum Chaos

**Shin-ya Koyama**

abstract:　The arithmetic aspects of quantum chaos are surveyed. In particular the relations between zeta functions and quantum chaos are discussed. In the earlier sections we recall the notion of fundamental groups, arithmetic manifolds, explicit formulas, prime number theorem and the trace formulas. Whereas in the later sections we explain the results on quantum ergodicity, and then report on the recent developments on the relation between the theory of zeta functions and random matrix theory.