数学セミナー（２０００年８月号）数セミ談話室

複素数でわかる実数列のバランス

—— 指数和と一様性 ——

小山 信也 （慶應大）

1　「もち」や「つぼ」のバランス

いろいろな方向からのバランスを取ることは，多くの場面で欠かせない．たとえば，おいしいもちをつくには，杵で１回つく度に脇から手を入れてもちの形を整えながら，もちの各部分を均等につく必要がある．そうしなければ，弾力のかたよった不均質のもちができてしまう．

ろくろを回してつぼを作る場合も同様である．あらゆる方向から均等に力を加えなくては，つぼの形がくずれてしまう．

このように，すべての方向にバランスを取るという現象は，現実の世界ではしばしば起きることである．これを数列の世界に当てはめ，数列の持つある種のバランスを考えることが本稿のテーマである．これは高校で学ぶ「複素数」の応用であり，大学

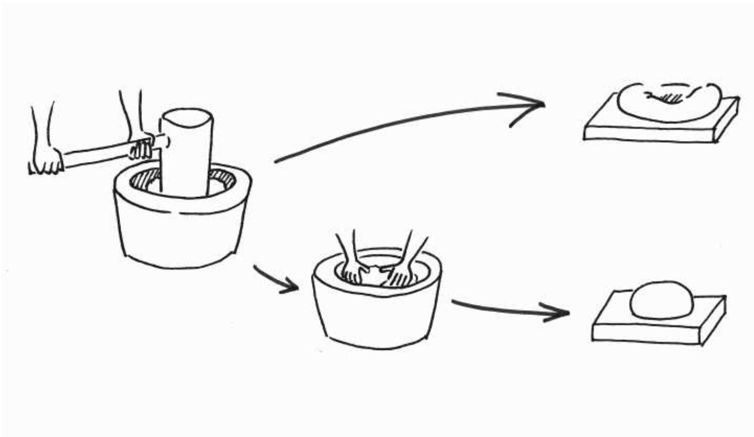


図 1: もち

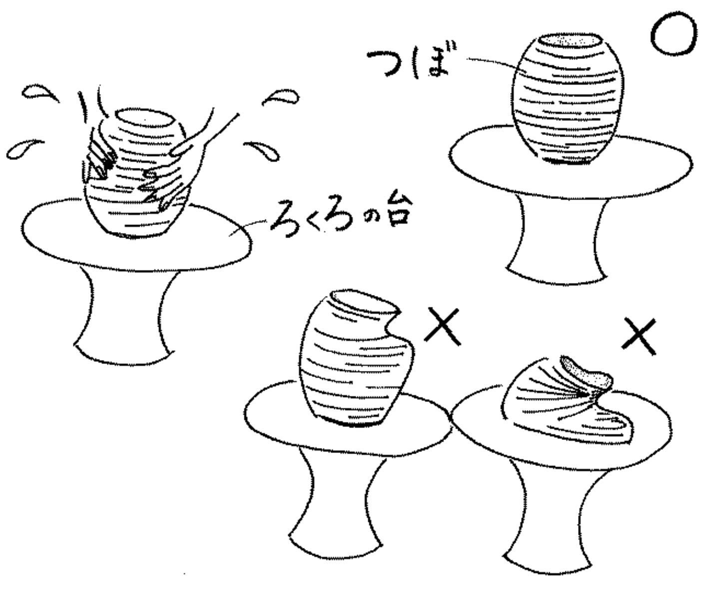


図 2: つぼ

以降で学ぶ「分布の一様性」，さらには「指数和の評価」という解析的整数論における重要な発想の入門でもある．

2　数のバランス

実数からなる数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ があったとする．これらの数たちがどれくらいバランスよく分布しているか，それを計る方法を考えてみたい．バランスのよさを数学的に定義することはそう簡単ではないが，たとえば次のような方法がある．

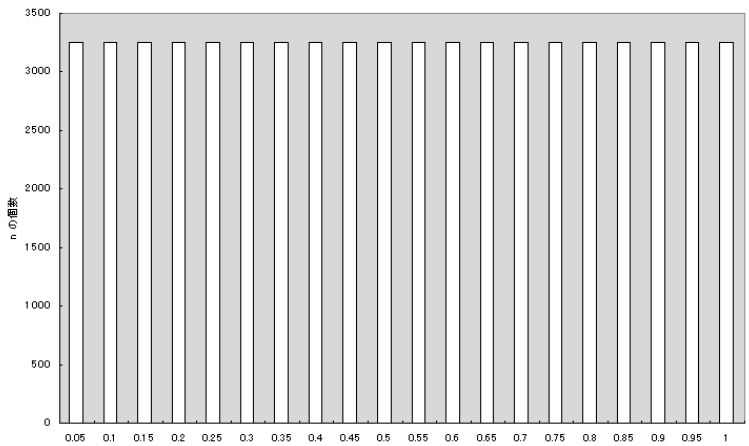
各項 a_n の小数部分を b_n とおく．b_n は 0 以上 1 未満の実数で，区間 $[0,1)$ 内に分布している．この分布が区間 $[0,1)$ 内にわたって均等であるか，それともどこかにかたよっているか，それによって数列 a_n のバランスのよさをある程度判定できる．たとえばバランスの悪い数列の例として，

$$a_1 = 1.53, \quad a_2 = -13.53, \quad a_3 = 8.53, \ldots$$

があげられる．この数列は小数部分が 0.53 であるような数ばかりからなる．これは一般の実数列としてはきわめて特殊な現象であり，この数列が実数たちに平等に分布しているとはいえそうにない．そのバランスの悪さは，小数部分 b_n の分布にあらわれていて，実際 b_n は区間 $[0,1)$ 内で一点に集中するというかたよりを呈している．

逆に a_n がいろいろな実数値をバランスよく取っていた場合，小数部分 b_n は区間 $[0,1)$ の中で均等に分布するのが自然であろう．

このように，小数部分の分布を基準にしたバランスのことを，その数列の「mod 1 の一様性」という．後に，この概念を数式を用いて厳密に定義する．



[グラフ 1] $\sqrt{2}n$ の小数部分

3 $\sqrt{2}n$ の小数部分

$a_n = \sqrt{2}n$ の場合を考える．

$\sqrt{2}$ は無理数であるから，小数部分 b_n は同じ値を 2 度取らない．実際，もし異なる 2 つの整数 n, m に対して $b_n = b_m$ であったと仮定すると $a_n - a_m = \sqrt{2}(n-m)$ が整数となる．この整数を k とおけば $\sqrt{2} = \frac{k}{n-m}$ となり，これは $\sqrt{2}$が無理数であることに矛盾する．したがって，n を増やせば増やすほど次々に新しい b_n の値が得られる．

グラフ 1 は 65000 未満の n に対し，b_n を 0.05 刻みで分類した度数分布をあらわしたものである．横軸 0.1 の上にある棒は，0.05 以上 0.1 未満であるような n の個数をあらわしている．これをみると，このグラフはどの棒もほとんど高さが同じであることがわかる．実際，高さの最小値は 3248，最大値は 3252 であり，その差はたったの 4 である．3200 くらいの大きさの数を 20 個比べて，それらの間にわずか 4 の違いしかないのだから，これは驚異的な偶然か，でなければ何か理由があるはずである．

いずれにしても，$\sqrt{2}n$ の小数部分は非常にバランスよく分布していることがわかる．数列$\sqrt{2}n$ に関し,「mod 1 の一様性」が成り立っているといえそうである．

以下に，この「バランスのよさ」を数式を用いて厳密にあらわし，実際に一様性を証明してみる．

4　偏角に注目

もちやつぼの例でもみたように，バランスがよいということは，すべての方向に均等に分布するということである．そこで，数列 a_n を偏角とする複素数を考える．角度の単位として高校では普通ラジアンを用いるが，ここでは回転数を用いる方がわかりやすい．回転数とラジアンは

$$2\pi \text{（ラジアン）} = 1 \text{（回転）}$$

によって換算できる．以下，すべての角度は回転数であらわすものとする．a_n を偏角とする単位円周上の複素数は，

$$\cos(2\pi a_n) + i\sin(2\pi a_n)$$

である．これを $e(a_n)$ とおく．すなわち $e(x)$ は単位円周上にある偏角 x の複素数のことであり，三角関数の加法定理から

$$e(x)e(y) = e(x+y) \tag{1}$$

が証明できる．なお，大学の数学で複素数乗を習うと $e(x) = e^{2\pi ix}$ であることがわかる．これは指数関数に虚数を代入したものである．その意味で式（1）は指数法則に他ならない．また，本稿の副題にある「指数和」とは，後節に登場する $e(x)$ たちの和 S のことである．

$e(x)$ の満たす他の性質として，複素共役に関する

$$\overline{e(x)} = e(-x) \tag{2}$$

という関係がある．また，今は回転数を偏角の単位としているため，x が整数 k のときには

$$e(x) = e(k) = 1 \tag{3}$$

となる．したがって，実数 a に対する $e(a)$ の値は a の小数部分にしかよらない．すなわち，a の整数部分を k, 小数部分を b とおくと，

$$e(a) = e(k+b) = e(k)e(b) = e(b) \tag{4}$$

となる．

そこで，実数列 a_n のバランスのよさ（mod 1 の一様性）を判定するには，複素数列 $e(a_n) = e(b_n)$ のバランスを調べればよいことになる．

5　指数和としてのバランス

実数が 1 本の数直線であらわされるのに対し，複素数は複素平面であらわされる——高校で学ぶこの事実は，複素数は方向付きの数であることを意味している．したがって，もちつきやつぼ作りのように，全方向へのバランスという概念が発生する．

いくつかの複素数があるとき，それらがある方向にかたよっているか，それともいろいろな方向にバランスよく分布しているか，それはそれらの複素数の和の大きさを考えればわかる．なぜなら，複素数の足し算は複素平面上のベクトルの合成によって行なわれる．2 つの複素数の和の絶対値は，それらの偏角が等しい場合にまっすぐ加えることになりもっとも大きくなる．一般には図 3 のように，偏角が近ければ近いほど和の絶対値は大きくなり，反対向きであるほど和は打ち消し合って小さくなる．3 つ以上の複素数の和についても同様であり，偏角が同じ方向に集中していればそれらの和の絶対値は大きくなるし，バランスよ

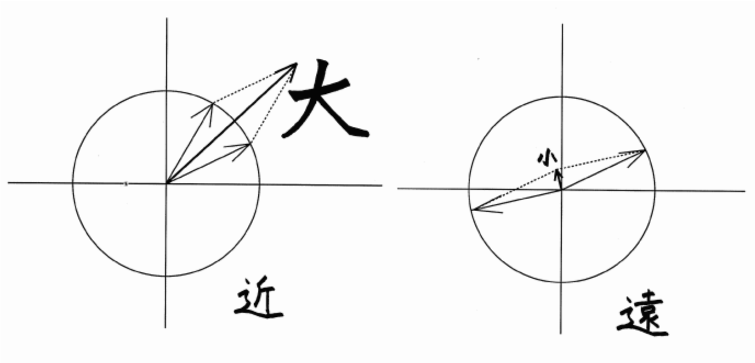


図 3: 複素数の和

く適当にばらけて分布していれば和は打ち消し合って小さくなるのである．

そこで，単位円周上の複素数列 $e(a_1), ..., e(a_N)$ のバランスをみるため，それらの和

$$S = \sum_{n=1}^{N} e(a_n) \tag{5}$$

の絶対値 $|S|$ を考えることになる．これで数列 a_n の分布の一様性が本当に計れるのか，実際にさきほどの例 $a_n = \sqrt{2}n$ で $|S|$ を計算してみよう．グラフ 1 でみたように数値計算では a_n の分布は一様でバランスがよいようだが，それは $|S|$ の値にどのように反映されているのだろうか．

6　$\sqrt{2}n$ の一様性

$a_n = \sqrt{2}n$ に対し，$S = \sum\limits_{n=1}^{N} e(a_n)$ を計算してみよう．まず指数法則（１）により，

$$e(2x) = e(x + x) = e(x)^2$$

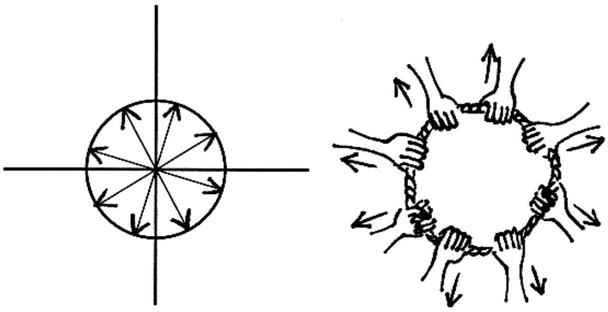


図 4: 全方向のバランスが大切

となる．これを繰り返すと一般に $e(nx) = e(x)^n$ となる．したがって，$a_n = \sqrt{2}n$ のとき，

$$e(a_n) = e(\sqrt{2}n) = e(\sqrt{2} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2}) = e(\sqrt{2})^n$$

である．よって S は等比数列の和となり，公式[1]から

$$S = \sum_{n=1}^{N} e(\sqrt{2})^n = \frac{e(\sqrt{2})(1 - e(\sqrt{2})^N)}{1 - e(\sqrt{2})}$$

となる．$e(\sqrt{2})$ は単位円周上の点で絶対値 1 であるから，S の絶対値は

$$|S| = \frac{|1 - e(\sqrt{2})^N|}{|1 - e(\sqrt{2})|}$$

である．分母は図 5 より $|1 - e(\sqrt{2})| = 2|\sin(\sqrt{2}\pi)|$ となる．また，分子の $e(\sqrt{2})^N$ の部分は絶対値 1 の複素数であるから，N の値にかかわらず

$$|1 - e(\sqrt{2})^N| \leq 2$$

が成り立つ．したがって

(6) $$|S| \leq \frac{1}{|\sin(\sqrt{2}\pi)|}$$

[1]高校で習う等比級数の和の公式は，複素数列に対しても成立する．

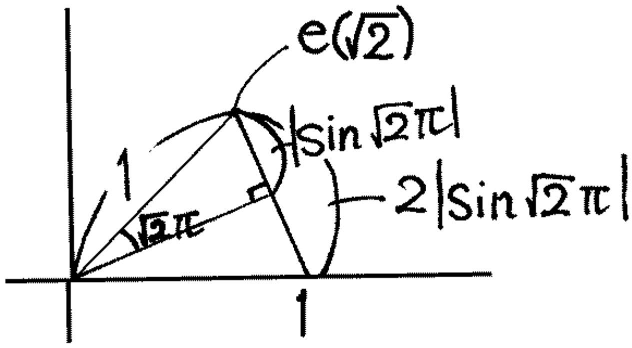


図 5: $|1-e(\sqrt{2})| = 2|\sin(\sqrt{2}\pi)|$

となる．不等式（6）の右辺が N によらない定数であることに注目するべきである．なぜなら，S は a_n の初めの N 項の和であったから，S が Nによらないということは，いくら多くの項を算入しても $|S|$ の値はある限界以上には決して増えないということである．もし複素数のバランスが悪く，似たような方向にばかり集中していたら，そういう数を加えていけばいずれ和の絶対値は増えていくはずである．いくら加えても和が増えないということは，全方向にバランスよく打ち消しあっているという状況を意味している．

7　一様性の定義

もともと，和 S は絶対値 1 の複素数を N 個加えたものなので，絶対値 $|S|$ は N 以下である．すなわち，自明に

$$|S| \leq N \tag{7}$$

が成り立っている．数列のバランスが非常に悪い場合，たとえば複素数列 $e(a_n)$ の偏角（すなわち a_n の小数部分 b_n）が同じ値

ばかり取るような場合には，不等式（7）は等号が成り立つ．一方，前節の例のように，バランスがよい場合には（7）よりもよい評価の「$|S| \leq$ 定数」が成り立っている．そこで，項数 N が十分多い状況で不等式（7）の右辺が少しでも小さく改善される場合，すなわち

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|S|}{N} = 0 \tag{8}$$

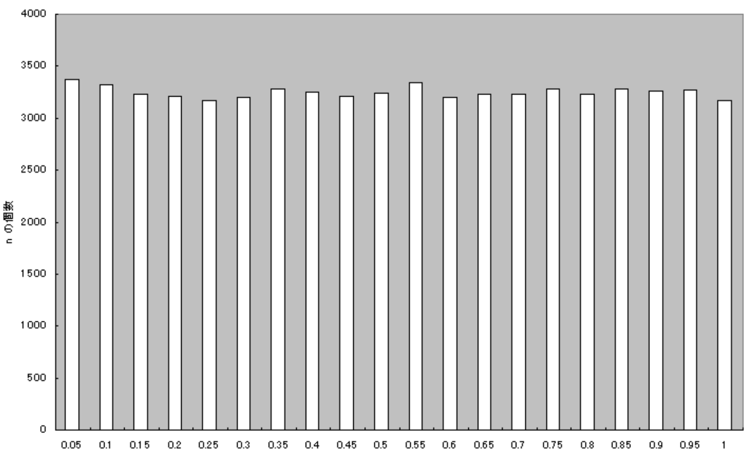
となるとき，数列 a_n は「mod 1 の一様性」が成り立っているという．これが冒頭から述べてきた「バランスのよさ」の一つの数学的表現である．

$a_n = \sqrt{2}n$ という数列は,「mod 1 の一様性」が成り立つ数列であり，そのバランスのよさが棒グラフの高さの安定度としてあらわれていたのである．

8 $\sqrt{2}n^2$ の一様性

これまでみてきた例では，$|S|$ は不等式（6）のように定数で押えられた．しかし一様性の定義（8）は，それよりずっと弱い状態でも満たされる．たとえば $|S| \leq \sqrt{N} = N^{\frac{1}{2}}$ のように，定数では押えられないが N の 1 乗よりも小さな関数で押えられれば（8）は満たされることになる．

では実際にそのような数列があるのだろうか．ここではそうした一例として $a_n = \sqrt{2}n^2$ を扱う．再び $0 < n < 65000$ に対して計算した結果をグラフ 2 に示す．今度はさきほどの例に比べて少しデコボコがあることがみてとれる．高さの最小は 3173，最大は 3371 であり，その差は 198 である．これはさきほどの 4 に比べれば大きいが，3200 程度の大きさの数を 20 個も並べていることを考えれば，まあバランスが取れている方といえるだろう．



[グラフ 2] $\sqrt{2}n^2$ の小数部分

9　ワイルの方法

では，実際に $a_n = \sqrt{2}n^2$ に対して $|S|$ を計算し，自明な不等式（7）が改善できるかどうかをみてみよう．今度は等比数列ではないので，ずっと難しい．以下に述べる方法は「ワイルの方法」として知られているもので，解析的整数論などで現在でも最先端の研究で用いられている，歴史に残る偉大な発想である．

さきほどの例で $|S|$ を有限の値で押え，見事に一様性が証明できたのは，$e(a_n)$ に等比数列の公式を適用できたからであった．これは，元をたどれば a_n が n の 1 次式すなわち等差数列であったことによる．偏角が等差数列であれば，複素数は単位円周上を一定間隔で動くから，原点からみてどの方向にも平等にベクトルが加算されていくわけである．このことは a_n が n の 1 次式であるという特殊な事情からきており，2 次式ではこのような現象を期待することはできない．そこでワイルは，2 次式を 1 次式に帰着する方法を考えた．それは絶対値の 2 乗 $|S|^2$ を考えるというアイディアであった．

絶対値の２乗とは，共役複素数との積である．$e(a_n)$ の共役は公式（２）により $e(-a_n)$ であり，以下にみるようにこれらをかけることで n^2 の項が打ち消され，n の次数が下がって１次式になるのである．

$$\begin{aligned}
|S|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{N} e(\sqrt{2}n^2)\right|^2 \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} e(\sqrt{2}n^2)\right)\left(\sum_{m=1}^{N} e(-\sqrt{2}m^2)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} e(\sqrt{2}(n^2-m^2)) \\
&= \sum_{k=-N+1}^{N-1}\sum_{n} e(\sqrt{2}(n^2-(n+k)^2))
\end{aligned}$$

最後の式で n^2 の項が消える様子がみてとれる．これは，それまで n と m にわたる２重和だったのを $m=n+k$ とおくことにより n と k にわたる２重和に書き換えた式である．k のわたる範囲は m と n の差だから $-N+1 \leq k \leq N-1$ となる．n のわたる範囲は最後の式には省略されているが，これは k によって変わり，図６の領域のあらわす範囲で，$1 \leq n \leq N$ の全体または一部分の連続した区間である．

以下のようにさらに計算を進めると，今省略した n の範囲は実はそれほど重要ではないことがわかる．

$$\begin{aligned}
|S|^2 &= \sum_{k=-N+1}^{N-1}\sum_{n} e(\sqrt{2}(-k^2-2kn)) \\
&= \sum_{k=-N+1}^{N-1} e(\sqrt{2}k^2)\sum_{n} e(2\sqrt{2}kn)
\end{aligned}$$

この変形は，まず左辺が $|S|^2$ であることから，右辺の和の値も実数になっていることに注意し,（２）を用いて $e(\ )$ の中のマイナスを外した．さらに指数法則（１）によって k^2 と $2kn$ の部分を分け，このうち $e(\sqrt{2}k^2)$ は n と無関係だから $\sum_{n}$ の前にくくり出してしまったものである．

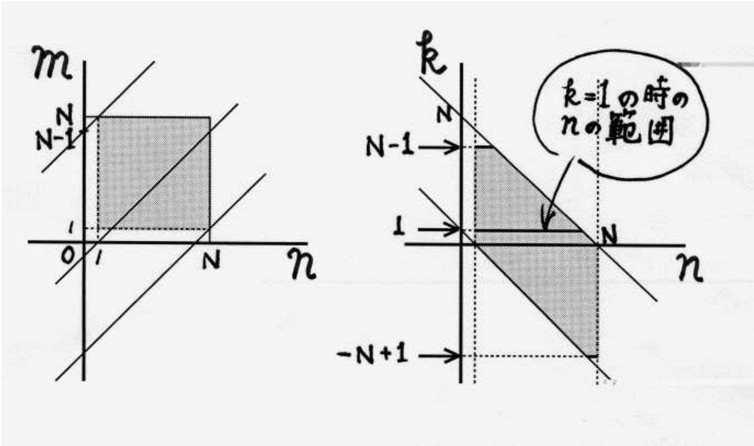


図 6: k に応じて決まる n の範囲

ここで得た和のうち n に関する和は，さきほどの一次式の場合と同様の方法で計算できる．（ただし，$k=0$ の場合だけは例外で，和の各項はすべて 1 になるから打ち消し合いが起きず，n に関する和は N となる．）$k \neq 0$ のときは，さきほどの$\sqrt{2}$ の代わりに $2\sqrt{2}k$ を考えればまったく同じ方法が適用でき，

$$\left|\sum_{n} e(2\sqrt{2}kn)\right| \leq \frac{1}{|\sin(2\sqrt{2}\pi k)|} \tag{9}$$

と押えられる．この右辺は和に参加する n の項数によらない．n が連続した整数をわたるなら，どこを何項わたってもこの不等式は成り立つ．これはさきほどみたとおりである．

さきほどと違う点は，右辺が一定ではなく変数 k を含んでいることである．$\sin x$ という関数は，x が π の整数倍のとき 0 となる．今の場合，$x = 2\sqrt{2}\pi k$ が π の整数倍になるのは $2\sqrt{2}k$ が整数になるときであり，それは$\sqrt{2}$ が無理数だから起こり得ないが，$2\sqrt{2}k$ が整数に非常に近い値になることは起こり得るだろう．実際，k をいろいろな整数にわたらせれば$\sqrt{2}k$ の小数部分が区間 $[0,1)$ 内で一様に分布することをさきほどからみてきたわけであり，これは，$2\sqrt{2}k$ が整数の近くにも確実に分布していること

を意味している．そして，$2\sqrt{2}k$ が整数に近いとき，$\sin(2\sqrt{2}\pi k)$ は０に近くなる．すると $\dfrac{1}{|\sin(2\sqrt{2}\pi k)|}$ は大きな値となってしまい，不等式（９）はあまり価値のない式になってしまう．そのような k に対しては，不等式（９）よりも自明な式（７）の方が優れていることになる．したがって，k をいろいろにわたらせて用いるには,（７）（９）を両方合わせた

$$\left|\sum_n e(2\sqrt{2}kn)\right| \le \min\left\{N,\ \ \frac{1}{|\sin(2\sqrt{2}\pi k)|}\right\} \tag{10}$$

の方が有効である．（$\min\{a,b\}$ は a と b の小さい方という意味である．）

以上の結果，$k=0, k\neq 0$ の場合を合わせると

$$|S|^2 \le N + \sum_{k\neq 0}\min\left\{N, \frac{1}{|\sin(2\sqrt{2}\pi k)|}\right\} \tag{11}$$

となる．$\sum_{k\neq 0}$ はさきほどの k の範囲$-N+1\le k\le N-1$ から $k=0$ を除いた部分をわたる．

以下，この和の大きさをみていこう．

10　ディオファンタス近似へ

ここから先は高校生には難し過ぎるかも知れないことを初めに申し上げておきたい．説明に省略も多いためすべてを理解することは難しいと思うが，概略と雰囲気を感じとっていただければと思う．

式（１１）の min において N と $\dfrac{1}{|\sin(2\sqrt{2}\pi k)|}$ のどちらが小さいかは問題である．仮に，いつも N の方が小さかったとすると $\sum_{k\neq 0}$ の和は k の個数だけ繰り返し N が足されることになる．k は $(2N-2)$ 通りの値を取るから,（１１）は

$$|S|^2 \le N + N(2N-2) = 2N^2 - N$$

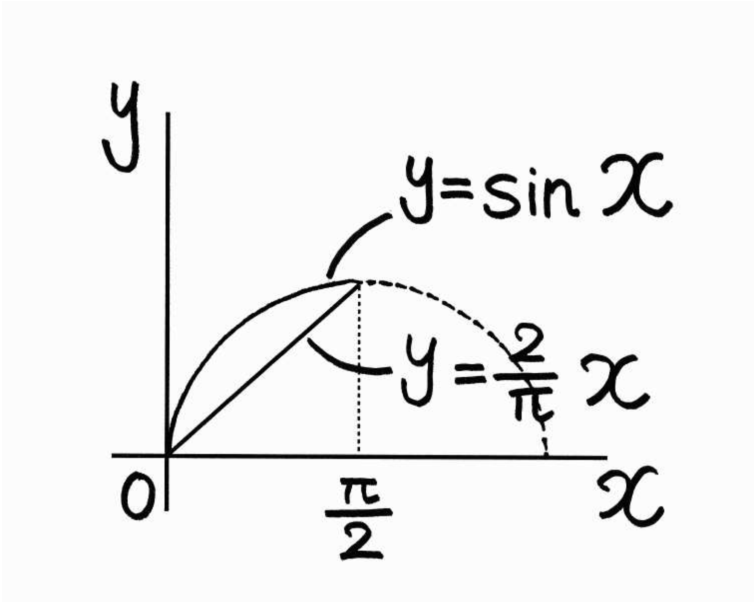


図 7: $\sin x > \frac{2}{\pi}x$

となる．これは自明な（７）すなわち $|S|^2 \leq N^2$ より悪い．したがって，（１１）の min においてあまり多くの N が選ばれると証明ができないことになる．

逆に $\dfrac{1}{|\sin(2\sqrt{2}\pi k)|}$ の方が小さい場合，π の適当な整数倍だけグラフを平行移動し，図７のように $[0, \frac{\pi}{2})$ の区間で $y = \sin x$ と $y = \dfrac{2}{\pi}x$ のグラフを比べてみる．すると $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ であるから，逆数をとって $\dfrac{1}{\sin x} < \dfrac{\pi}{2x}$ となる．詳細は省略するが，このようにして $\dfrac{1}{\sin(2\sqrt{2}\pi k)}$ は $\dfrac{1}{k}$ に似た形の式で押えることができる．

$\dfrac{1}{k}$ は，k が大きいときにはとても小さくなるから，この和は N を増やしてもほとんど増大しない関数[2]となる．したがって（１１）の min で $\dfrac{1}{|\sin(2\sqrt{2}\pi k)|}$ が選ばれることは望ましい，と

[2]実際には $\log N$ くらいの大きさになる．これは N よりも，さらに $\sqrt{N}$ よりも，ずっと小さい．正確には，任意の $\varepsilon > 0$ に対して N^ε よりも小さい．

いうことがわかる.

すなわち証明に成功するためには,（１１）の min の部分の大小比較を正しく理解すればよい. 元をたどればこれは

$2\sqrt{2}$k という無理数が整数に近くなるのはどんなときか

ということである. これは

$2\sqrt{2}$ という無理数はどんな有理数 に近いか

といってもよい. 実際もし $\dfrac{a}{q}$ という有理数に近ければ, $k = q$ のときに $2\sqrt{2}k$ は整数 a に近いからである.

このように無理数を有理数で近似する理論は「ディオファンタス近似」と呼ばれる整数論の一分野である. 無理数であるから q をいくらでも大きく取れることは当然であるが, q の大きさに比べて精度がどうなるかが問題である. この理論はやさしくないし, これ以上の詳細をここで説明することは（悔しいけれど）できない. 結果だけ述べておくと（１１）の計算をさらに進め, 最後に両辺の平方根を取ると,

$$|S| \leq (\text{定数}) \times N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

が成り立つ. ε は任意の正数である. したがって, すごく小さな ε を考えれば, 右辺は $N^{\frac{1}{2}} = \sqrt{N}$ （の定数倍）に非常に近い. 少なくとも, 自明な「N の１乗」よりは格段によい不等式になっており,（８）が満たされ一様性が成立するのである.

11 あとがき

高校で習う複素数は, 大学以降でさまざまな広がりをみせる. ここでは複素数が実数列の性質を記述し, それが指数和, さらにディオファンタス近似というより高度な数学につながっていく流れをみてきた.

本稿では触れなかったが, 指数和はゼータの評価, ゼータの零点分布, ラプラシアンの固有値分布など, 整数論や幾何学と

いった多くの数学に役立っており，現在もなお指数和を用いてゼータの値の評価を改善するなどの研究が最先端で活発に行なわれている．そこではもっと一般にいろいろな x に対する「mod x の一様性」を考えたりもする．たとえば初めの例 $a_n = \sqrt{2}n$ は mod $\sqrt{2}$ では一様ではない．x を動かしても一様性がくずれないような数列こそ，究極のバランスのとれた数列といえるだろう．そしてゼータの零点やラプラシアンの固有値は，そのような美しい分布をなしていることが予想されている．これらの分野は題材が具体的であり，高度で抽象的な数学の知識を持たない高校生にも，計算さえいとわなければ手の届く範囲にあると思う．興味を持たれた読者は，以下の文献などを参考にしてみることをお勧めしたい．

参考文献

[1] 「岩波数学辞典 第 3 版」 項目 187「数の幾何」F,G,H

[2] 鹿野健「解析数論」（教育出版）1978

[3] Nathanson "Additive Number Theory, the classical bases" Graduate Text in Math. 164 (1996) Springer

え／中筋 麻貴