数学のたのしみ 17 (Jan 2000)

ゼータの零点とは

小山 信也 （慶應大）

1 砂粒のルール

大きな紙の上に，砂粒が散らばっている．漠然とランダムにばらまかれたように見える砂粒が，実は未知のルールにしたがって分布していたとすれば，それは驚きであろう．外見からは想像もできない，秘められたルールによって砂粒が支配されているのなら，その秘密の法則を突き止めたいと誰もが思うに違いない．

法則を見つけようと，自分の近くにある砂粒たちをよく見てみるが，何もわからない．どう見てもばらばらにしか見えない．少し別の場所に動いて見てみても，やっぱりわからない．ところが，そこであきらめず，さらに動き続け，もっともっと動いてみたら，意外なことがわかってきた．実は，ある場所に磁石が置かれてあり，磁石の近くでは砂粒は明らかに磁力線に沿って並んでいたのである．そう，実はこの砂粒の正体は砂鉄だったのだ．磁石から離れたところでは，その影響が見えにくかったのである．

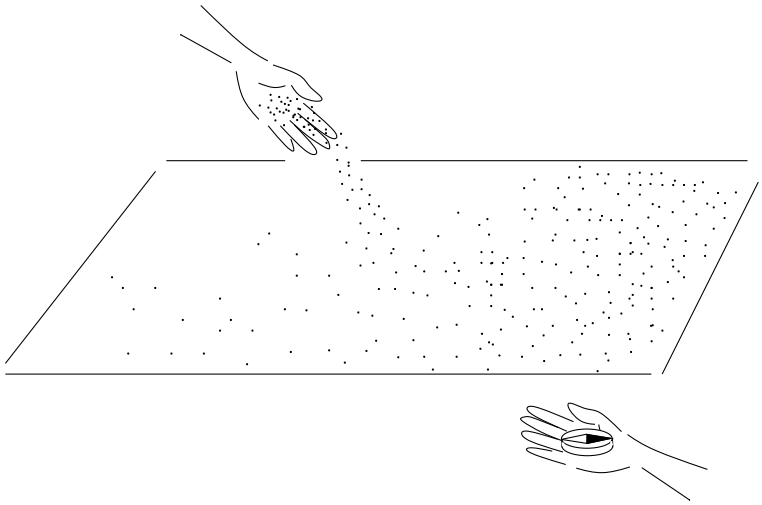

図 1: 磁石はあるのか？

2　ゼータの砂粒

この記事では「ゼータの零点」という砂粒を扱う．ゼータとは，整数論で大切な関数の一族の総称であり，素数全体に渡る積として定義されるリーマン・ゼータが代表的である．それらの零点（非自明零点）の位置は特に重要で，多くの応用を持つ．たとえばリーマン・ゼータの場合，零点の実部がわかると，精密な素数定理（素数がどれくらいたくさんあるか）を証明できる [10, 11, 12].

そこで，零点の位置や分布のしかたを研究することが，ここ１００年以上の間，世界中で盛んに行なわれてきた．特に零点の実部の値は，リーマンが１８５９年に「リーマン・ゼータのどの零点も実部は $\frac{1}{2}$ であろう」と予想し，その後，この予想がもし正しければ，さらにいろいろな未証明命題を証明できることがわかった．これが「リーマン予想」であり，大きな影響力を持つ未解決問題である．これまで数値計算により，実軸に近い方から数えて少なくとも３０億＋２個の零点の実部が $\frac{1}{2}$ であること

がわかっている [3].

リーマン予想は，ゼータの零点の実部の位置に関する予想であるが，人々の１４０年に渡る努力が教えてくれたことは，零点の位置を短絡的に求めようとしても，それはなかなか難しいということだった．そこで最近の研究では，いきなり位置を求めるよりも，まずは零点とは何か，その意味，あるいは意義を知ることに努力の重点がおかれているようである．意義がわかれば，将来おのずと位置もわかるかも知れないのだ．

実際，ゼータには数々の種類があり，それらの中には，零点の位置や実部を求めることがこれまでに成されたものもある．合同ゼータやセルバーグ・ゼータなどがそうした例であり，これらについては，リーマン予想に当たるものが既に証明されている．こうした場合に共通して言えることは，零点は何らかの作用素（フロベニウスやラプラシアン）の固有値として解釈できるということである．零点の意義を突き止め解釈した結果，位置を求めることが可能になったのであった．したがって，リーマン・ゼータに関する元来のリーマン予想を解くためにも，あるいは，より一般的に保型Ｌ関数などの未解決な問題を解くためにも，まずはゼータの零点とは何なのか，その正体を知ることは有効に違いない [9].

そんなふうに零点の正体を探ろうとする過程で，最近それが２つの方向について考えられることがわかってきた．１つは，特定のゼータについて零点分布を研究することであり，これは磁石から特定の距離だけ離れた範囲の砂粒の分布を見ることに当たる．そして２つ目は，ゼータをある方向に動かしながら零点分布の極限的状況を観察することであり，これは磁石に向かって距離を縮めていきながら磁石の存在を突き止め，分布を支配する磁力の性質を研究することに当たる．ゼータを動かしてみるというこの視点は特に重要であり，単体のゼータからは見えてこ

ない，より深く秘められた零点の正体がかいま見えるのである．止まっていては見えず，動いて初めて見える光景なのである．

3　量的分布から質的分布へ

点列の分布を考える場合，初めの手段として，私たちは量的な分布を考えることが多い．これは，たとえば正の実数列

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3, ...$$

が与えられたとき，T 以下のものの個数

$$N(T) = \#\{j \mid a_j \leq T\}$$

という量的なものを T の関数として表すことである．もし任意の実数 T に対して完璧に $N(T)$ を表すことができれば，分布の全貌を把握できたことになる．その意味では，$N(T)$ を用いた量的分布を究極まで考えれば，分布に関するすべてを考えていることになり，他に質的分布などを考える必要はないともいえる．しかし，現実には $N(T)$ を完全に表示することは難しい場合が多く，$N(T)$ の大まかな挙動（T の増大に伴って $N(T)$ は指数関数的に増大するのか，それとも多項式的に増大するのか．多項式的ならば，その次数はいくつかなど）を求めたり不等式で評価したりすることが研究対象となっている．

後で説明するゼータの零点に関しても，$N(T)$ の大まかな挙動はリーマンによって１００年以上前に求められたが，そこから零点とは何なのか，その意義に関する手がかりは全く得られなかった．

これよりわかることは「元の個数を考える」という，量的な考察には限界がある，ということである．箱に 5 個のリンゴが入っているということがわかっても，それが等間隔（一様分布，

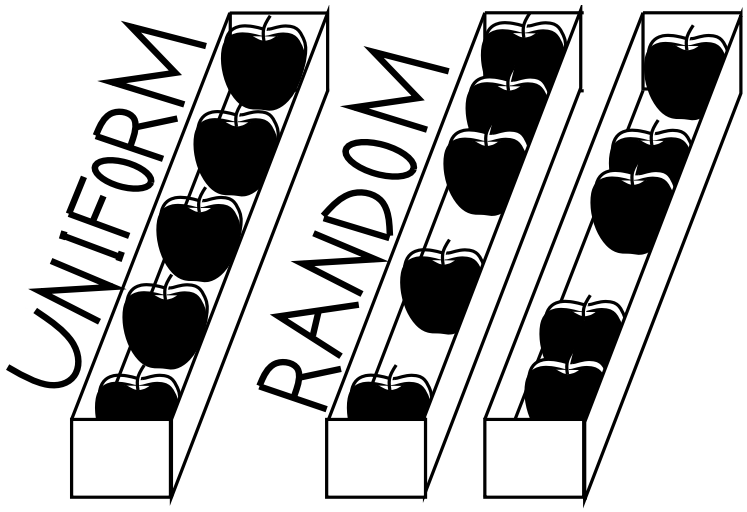

図 2: 一様とランダム

uniform distribution）なのか，それとも不規則（ランダム，random distribution）なのかによって，分布の様子は全く違って見える．個数だけでは状況はわからないのである．

そこで，$N(T)$ のような量的な分布を表す方法とは別に，一様かランダムかといった，いわば「質的分布」を表す方法が必要になる．たとえば，量的には N 個であることがわかっている場合に，それらが一様かランダムかを表す手段として，隣り合う 2 元の間隔$\Delta_j = a_{j+1} - a_j$ を考え，区間 $[a,b]$ に対し，間隔 Δ_j が $[a,b]$ に属するような j の割り合いを考えるという方法がある．すなわち，

$$\mu([a,b]) = \frac{1}{N-1}\#\{1 \leq j \leq N-1 \mid \Delta_j \in [a,b]\}$$

を，$N(T)$ の代わりに考えるのである．$\mu([a,b])$ は各区間 $[a,b]$ に 0 と 1 の間の実数を対応させる関数である．($\mu([a,b])$ は数学的には測度として扱われるが，測度の説明はここでは省略する．) $\mu([a,b])$ も，個数という意味では量的であるが，もとの数列の元の代わりにその間隔の個数を考えることにより，質的分布を表

しているといえる．たとえば，等間隔の分布なら，$[a,b]$ の長さがその間隔よりも大きいか小さいかによって，$\mu([a,b])$ は 2 通りの値しか取らないし，逆にランダムな分布であれば，$\mu([a,b])$ の値はいろいろに変化するであろう．

4　止まって見える風景

§ 2 で，零点の正体には 2 通りの意味合いがあると述べた．まず 1 つ目の，各位置での砂粒の分布について説明する．ここでは単独のゼータを考えればよいので，最も代表的なリーマン・ゼータについて説明する．リーマン・ゼータとは，素数 p に渡る無限積

$$\zeta(s)=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}$$

で定義される複素関数で，この無限積は $\mathrm{Re}(s)>1$ で収束する．$\zeta(s)$ は $s=1$ に 1 位の極を持ち，それ以外のすべての複素数 s に解析接続される．$\zeta(s)=0$ の実数解は $s=-2n$ $(n=1,2,3,...)$ である．これを自明な零点と呼ぶ．$\zeta(s)=0$ の虚数解は $0<\mathrm{Re}(s)<1$ に無限個ある．これを非自明零点と呼ぶ．本稿のテーマである砂粒としての「ゼータの零点」とは，非自明零点のことである．非自明零点は，$s=\frac{1}{2}$ に関して点対称に分布することがわかっている．したがって，虚部が正のものだけを考えれば十分であり，そのうち虚部の小さい方から順に零点を $\rho_1,\rho_2,...$ とおく．リーマン予想は「任意の j に対して $\mathrm{Re}(\rho_j)=\frac{1}{2}$」であることを主張している．

目標は ρ_j の意味を探ることである．そのため，まずはリーマン予想を仮定し $\rho_j=\frac{1}{2}+ir_j$ とおき，実数列 r_j についてその分布を考えてみる．リーマン予想を仮定してしまっては，リーマン予想の証明という大目標に役立たないではないか，との疑問もあろう．しかし，ここでリーマン予想を仮定するのには 2 つの

理由がある．１つは説明の便宜のためであり，２次元的な複素数の分布よりも，１次元的な実数の分布を考える方が，単純で扱いやすい．実際，後で述べるサルナックールドニックの定理は，リーマン予想を仮定しなくても成立するが，リーマン予想を仮定すると，より明解な形で定理が記述しやすくなる．第２の理由は，こうした未知の現象を解明する際には手順として，先に見当をつけることが有効だからである．ゼータの零点という砂粒が何なのか，はたして砂鉄なのか，もし砂鉄ならば，磁石は数学的な何に相当するのか，それを証明するために，まず傾向を知った上で予測することも必要なのである．

零点の意義が初めて注目されたのは，昔のことである．１９１５年にヒルベルトとポリャによって提案された「リーマン・ゼータの零点を作用素の固有値とみなせないか」という発想が，その起源であろう．しかしその後，リーマン・ゼータの零点の解釈に関し，進展は何十年もの間，全く得られなかった．

１９７３年，モンゴメリは画期的な論文 [4] を発表した．リーマン・ゼータの零点どうしの差に渡るある和が，ある特殊な不等式を満たすことを証明したのである．それは零点の配列に何らかの法則性があることを物語っていた．そして彼はその論文で「リーマン・ゼータの零点の差の分布は，サイズの大きなエルミート行列をランダムに考えたときの，行列の固有値どうしの差の分布に似ているらしい」と予想したのである．これがきっかけとなってオドリズコは，数値計算により図のような結果を得た．[5] このグラフ上のプロットされた点は，リーマン・ゼータの零点の差 $r_{j+1}-r_j$ を 0.05 刻みで分類し，各類に何個の間隔が入ってくるか，その個数をプロットしたものである．横軸は間隔の広さを表し，縦軸は度数を表している（ただし，軸に書かれた値は正規化されたものである）．実線は，ランダム行列の GUE というモデル（大きなランダム・エルミート行列の固有値の間隔

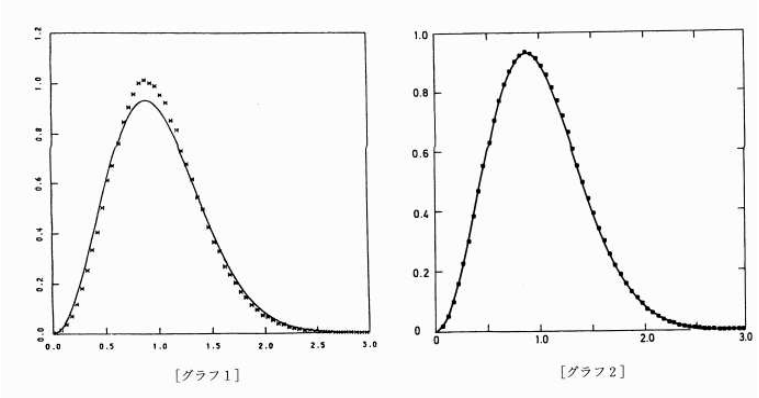

図 3: 零点の間隔分布と GUE 曲線

分布）の理論曲線である．グラフ１は初めの１０万個の零点から作ったものであり，グラフ２は 10^{20}番目の零点付近の７９００万個の零点から作ったものである．これにより，零点を十分たくさん取れば，その間隔分布の傾向は，理論曲線と完璧な一致を見ることがわかる．これを「モンゴメリーオドリズコの法則」と呼ぶ．法則といっても数学的には予想であり，証明されていない．しかし，この予想は，もともとは整数や素数を用いて定義されたゼータをランダム行列という全く関係ない別のものと結びつけるものであり，零点の意義を知る上では画期的なものである．

モンゴメリーオドリズコの法則に数学的・理論的な裏付けを与えるのは困難と思われていたが，ルドニックとサルナックは，１９９４年に初めて進展を得た．以下に彼らの論文 [6] の主定理を説明する．

リーマン•ゼータの零点の虚部のうち，最初の N 元 $\{r_1, ..., r_N\}$ の間隔分布を考える．知りたいのは，任意の $[a,b]$ に対する

$$N(a,b) = \#\{k \mid r_{k+1} - r_k \in [a,b]\}$$

という量である．しかし，この量を直接扱うことには，１つの難点がある．それは「隣り合う零点」という概念を，数学的に

きちんととらえるのが難しいことである．２つの零点が与えられた時，それらが隣り合っているかどうかは，それらをいくら目をこらして見てもわからない．その間のすべての値を知って，はじめてその２つが隣り合っているかどうかが判定できるからである．そこでまず，隣り合うという条件を外し「必ずしも隣り合うとは限らないすべての２つの零点」に関して，

$$N_2(a,b) = \#\{(r_i, r_j) \mid r_i < r_j,\ \ r_j - r_i \in [a,b]\}$$

を考える．これがもとの $N(a,b)$ とずれがあるとすれば，それは，２つの零点の間にさらに零点がある場合，すなわち $[a,b]$ 内に３つの零点がある場合である．つまり，そのずれは３つ組の個数

$$N_3(a,b) = \#\{(r_i, r_j, r_k) \mid r_i < r_j < r_k,\ \ r_k - r_i \in [a,b]\}$$

から来る．このように，正整数 n に対し正整数 $N_n(a,b)$ を，n 個の r_j の組で最大のものと最小のものの差が $[a,b]$ に属するものの個数とおく．すると，帰納的に

$$N(a,b) = N_2(a,b) - N_3(a,b) + N_4(a,b) - \cdots$$

と，有限交代和で表される．したがって今の目的のためには，$N_n(a,b)$ を $n = 2,3,4...$ に対して求めればよいことになる．

ルドニックとサルナックは，$N_n(a,b)$ を一般化した「n-階相関関係」というものを考えた．それは，一般の n 変数関数 f に対し，

$$R^{(n)}(f,N) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{(j_1,\cdots,j_n) \\ \text{distinct}}} f(r_{j_1}, ..., r_{j_n})$$

で定義される．特に，

$$(1) \qquad f(r_{j_1}, ..., r_{j_n}) = \begin{cases} 1 & (\max\limits_k r_{j_k} - \min\limits_k r_{j_k} \in [a,b]) \\ 0 & (\max\limits_k r_{j_k} - \min\limits_k r_{j_k} \notin [a,b]) \end{cases}$$

の場合，和の部分は最大限と最小限のギャップが区間 $[a,b]$ に属するような n 元の組の個数となり，先ほどの $N_n(a,b)$ との間に

$$R^{(n)}(f,N) = \frac{n!}{N} N_n(a,b).$$

という関係を持つ．定数 $\frac{n!}{N}$ がつくことは，今の目的のためには影響がないので，$R^{(n)}(f,N)$ について調べればよいことになる．

ところで「一般の n 変数関数 f」といっても，あまりにも漠然としているので，もう少し f に関する条件を考えてみると，以下の 3 つの仮定の下で考えればよいことがわかる．

1. $f(x_1,...,x_n)$ は，どの変数どうしについても対称
2. 任意の実数 t に対し $f(x_1+t,...,x_n+t) = f(x_1,...,x_n)$
3. $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ の下で，ベクトル $x = (x_1,...,x_n)$ が $|x| \to \infty$ となるとき，$f(x)$ は急減少して 0 に収束する．

仮定 2 は，f が，変数どうしの差にのみ依存する関数であることを表している．間隔すなわち差を調べるのが目的であるから，この仮定は自然である．また仮定 3 は収束性のために必要であるが，$\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ の下で考えてよい根拠は仮定 2 にある．たとえば，仮定 2 の式で $t \to \infty$ としても値は変わらないのでその場合の収束性は保証されており，考える必要がないのである．

ルドニック－サルナックの定理 [6].

f が上記 3 つの仮定を満たすとする．さらに，フーリエ変換 $\hat{f}$ が $\mathrm{supp}(\hat{f}(\xi)) \subset \left\{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| < 2\right\}$ を満たすと仮定する．このとき，$N \to \infty$ で

$$R^{(n)}(f,N) \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x) W_n(x) \delta\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1...dx_n$$

となる．ここで，$\delta(x)$ は 0 における Dirac mass であり，$W_n(x) = \det\left(\frac{\sin \pi(x_i-x_j)}{\pi(x_i-x_j)}\right)$ である．

関数 $W_n(x)$ はランダム行列の固有値の間隔を表す式である. Dirac mass $\delta(x)$ は $x=0$ でのみ値を持つ関数のようなものであるから，右辺の積分を仮定 3 の式 $x_1+\cdots+x_n=0$ の下に制限すると考えてよい．この定理が伝える感動的な事実は，ゼータの零点から作った $R^{(n)}(f,N)$ が，それと全く無関係に定義された $W_n(x)$ と何か関係しているということである.

この定理には，$\mathrm{supp}(\hat{f}(\xi))$ に関する仮定がついている．n 階相関関係と間隔分布を結びつけるために（1）で与えた f は，残念ながらこの仮定を満たしていない．したがって，ゼータの零点の間隔に関して，直接何かがわかったのかというと，それに答えるのは難しい．具体的には何もわかっていないのかも知れない. しかし定理は確かに，ゼータの零点から作った式とランダム行列から生まれた式との間の関わりを伝えている．これは，ゼータの零点という砂粒が，外見からはわからない秘められた意味を持っている可能性を，初めて示した定理であるといえよう.

この定理は，リーマン・ゼータのみならず，彼ら自身により，$GL(n)$ の保型L関数という，非常に一般的なゼータに拡張された [7]. これにより，数論的ゼータの零点分布は個々のゼータを見る限り，すべて GUE に関係づけられたといえる．これはすでに非常に不思議なことである．しかし，話はこれで終わりではなかった．ゼータの世界の真実は，さらに深かったのである．個々のゼータを見ているだけでは全く予想できなかった新たな真実が，ゼータをいろいろに動かすことで見えてきたのである.

5　動いて見える風景

ゼータを動かした場合の現象を考えてみたい．ここでは，いろいろなゼータを考える必要があるので，リーマン・ゼータとは別の，新しいゼータの族を定義する必要がある．そこで，有限

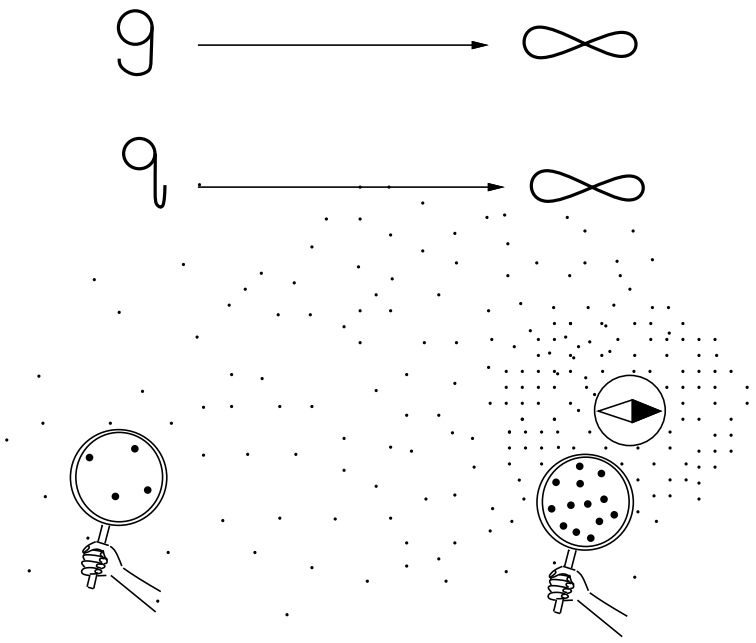

図 4: 動いてみると磁石の存在が予見される

体上の代数曲線の合同ゼータを考える．合同ゼータとは，q 元体 $\mathbf{F}_q$ 上の代数曲線 C に対し，

$$\zeta_C(T) = \prod_{v:\, k\text{の素点}} \left(1 - T^{\deg(v)}\right)^{-1}$$

で定義される．ここで v は C の関数体 k の素点を渡る．素点の定義は省略するが，ちょうど，リーマン・ゼータの定義における素数の代わりであり，関数体 k の元のうち既約多項式のようなものとみなせるので，その次数を $\deg(v)$ と書く．

リーマン・ゼータ $\zeta(s)$ の変数 s との類似関係を見るには，$T = q^{-s}$ とおくとよい．合同ゼータを s ではなく T の関数と書く理由は，$\zeta_C(T)$ が T の有理関数となるため，T で書いた方が便利であることによる．実際，以下の表示を持つことが，シュ

ミットにより証明された [1, 8].

$$\zeta_C(T) = \frac{P_C(T)}{(1-T)(1-qT)}$$

ここで P_C は偶数次の多項式である．$\deg(P_C) = 2g$ とおき，この整数 g を曲線 C の種数という．

合同ゼータのリーマン予想 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ は「P_C の任意の零点 T が $|T| = q^{-1/2}$ を満たす」と述べられる．これはヴェイユによって証明されている．そこで，その零点を $e^{i\theta_j} q^{-1/2}$ $(j = 1, 2, ..., 2g)$ とおく．我々の関心は s の虚部（あるいは T の偏角）$\{\theta_j\}$ の間隔分布にある．零点は有限個しかないから，一見したところ，間隔分布に法則性など考えられないかに見えるが，ここで登場する新しい発想は，一つのゼータだけを見るのではなく，代数曲線の族を考え，それに対するゼータの族を考えるということである．

先ほど構成したように，$\{\theta_j\}$ の隣り合う元の間隔のうち，区間 $[a, b]$ に属するようなものの個数を $\mu_C([a, b])$ とする．一つの C に対する零点は $2g$ 個であるから，合同ゼータの族で，$g \to \infty$ となる列を含むようなものを考えれば，その極限においては零点の個数も ∞ に近づき，間隔の度数分布がどんな曲線に近づくかという問題が，リーマン・ゼータと同様に考えられるのである．

カッツとサルナックは，著書 [2] において，$q \to \infty$ かつ $g \to \infty$ のとき，μ_C がある普遍的な関数 μ_0 に近付くことを証明した．その普遍的な関数とは，まず N 次ユニタリ行列 A の N 個の固有値列に対して前述の方法で関数μ_A を定義し，A を古典コンパクト群 $G(N)$ （$G = U, SU, O, SO, USp$ のいずれか）の元全体に渡らせてμ_A の平均を取った上で $N \to \infty$ としたものである．彼らは，まず G の選び方によらない普遍的な関数 μ_0 が存在することを証明した．厳密には，以下のように記述される．

カッツ－サルナックの補題 [2].

ある測度 μ_0 が存在し，任意の古典コンパクト群 （$G = U, SU, O, SO, USp$）に対し，

$$\lim_{N\to\infty} \int_{G(N)} \mu_A dA = \mu_0$$

となる.

この μ_0 を用いて，彼らは以下の主定理を証明した.

カッツ－サルナックの定理 1 [2].

$M_g(\mathbf{F}_q)$ を $\mathbf{F}_q$ 上の種数 g の代数曲線の同型類の集合とすると，

$$\lim_{\substack{g\to\infty \\ q\to\infty}} \frac{\sum_{C\in M_g(\mathbf{F}_q)} \sup_{x>0} |\mu_C([0,x]) - \mu_0([0,x])|}{\#M_g(\mathbf{F}_q)} = 0$$

分子の sup の部分は，2 つの関数が最も異なる瞬間の大きさを表しており，discrepancy（食い違い）と呼ばれるものである. この定理は，C を $M_g(\mathbf{F}_q)$ の全体に渡らせたときの discrepancy の平均が 0 に収束することを主張している. discrepancy が 0 であれば，2 つの関数（測度）は本質的に等しいとみなせるので，これは，μ_C が，μ_0 にある意味で「収束する」ことを伝えている.

この定理の証明には，以下の写像を用いる.

$$\begin{array}{ccc} M_g(\mathbf{F}_q) & \longrightarrow & USp(2g) \text{ の共役類の集合} \\ C & \longmapsto & \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{i\theta_g} & & & \\ & & & e^{-i\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & e^{-i\theta_g} \end{pmatrix} \end{array}$$

この写像が全射であることが重要であり，それは $M_g(\mathbf{F}_q)$ のモノドロミー群が $Sp(2g)$ の全体であることを用いて示される.

モノドロミー群の定義はここではできないが，$M_g(\mathbf{F}_q)$ という族を全体的にコントロールし，そのゼータの零点の分布を支配する働きを持つような大きな群であるというのが，この証明から得られる印象であろう.

6　大域モノドロミー

合同ゼータの例で学んだことは，ゼータを単体で考えたときに見られなかった零点分布の法則性が，ゼータの族を考えその中で極限を取ることにより初めて現れる，という現象である．そして，その族をまとめ，性質を支配しているのが，モノドロミー群と呼ばれる群であった.

この現象は，有限体上の世界（標数正の局所的な世界）において観察されたわけだが，この原理がリーマン・ゼータなどが属する通常の世界（標数 0 の大域的な世界）においてもあり得るのではないかと思うのは，自然な発想である．有限体上の代数曲線の合同ゼータに対するリーマン予想（ヴェイユが証明）をドゥリーニが有限体上の代数多様体の場合へ拡張して証明した際にも，一つの合同ゼータで証明したのではなく，ゼータの族を考え，そこに属するすべてのゼータについて一気に証明したのであった．ごく単純に考えれば，本来のリーマン予想を証明するに当たっても，リーマン・ゼータを単体で見ていても何もわからず，それが属するようなゼータの族を考え，そのモノドロミー群を求めることにより，解決できる可能性があるのかも知れない．これまで，モノドロミー群というものは局所的な場合にしか考えられたことがなく，大域的な場合にモノドロミー群が果たして存在するのか，どのように定義されるものなのか，それはまだわかっていない.

しかし以下に述べる結果は，ゼータの族のいくつもの実例に

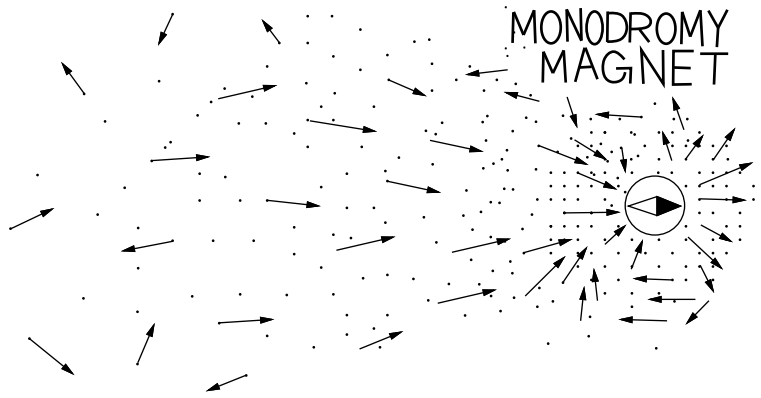

図 5: 零点を支配するものは？

関し，その中で極限を取ったときの零点分布が，ある大きな行列群に関係した関数で表されるというものである．それは，大域モノドロミーの存在を示唆しているとも考えられる．

まず，大ざっぱな感覚をつかんでみたい．f を ゼータや L-関数の源（たとえば代数曲線，ディリクレ指標，保型形式など）とする．f のある族 $\mathcal{F}$ を考えたい．どのような族を考えることが許されるのか，それを数学的に定義することは現段階ではできていない（しかし以下にいくつもの例をあげる）．

族の元 $f \in \mathcal{F}$ に対し，f の導手と呼ばれる正の数が定まり，c_f と書かれるものとする．$\mathcal{F}_X = \{f \in \mathcal{F} \mid c_f \leq X\}$ とおく．$L(s,f)$ の非自明零点の集合を $\frac{1}{2} + r_f^{(j)}\sqrt{-1}\ (j = 1, 2, ...)$ とおく．リーマン予想を満たすような零点に対しては $r_f^{(j)} \in \mathbf{R}$ であり，そういう零点について，$i \leq j$ ならば $r_f^{(i)} \leq r_f^{(j)}$ であるとする．

私たちは，族の個性が零点分布にどのように反映するかに興味がある．たとえば，その族の中で導手が X 以下のゼータについて調べるには，任意の関数 ϕ に対する値の和

$$W(X, \mathcal{F}, \phi) = \frac{1}{\#\mathcal{F}_X} \sum_{c_f \leq X} \sum_{j=1}^{\infty} \phi\left(r_f^{(j)}\right)$$

がわかればよい．ϕ は $\mathbf{R}$ 上の急減少関数であり，リーマン予想を満たさないような零点，すなわち $r_f^{(j)}$ が実でない場合には ϕ の値を 0 と考える．ϕ が急減少であるから，大きな $r_f^{(j)}$ は和にほとんど影響しない．したがって，$W(X,\mathcal{F},\phi)$ は実軸に近い零点の分布を表す（英語で the density of low-lying zeros と呼ばれる）．

§ 4 の終わりで述べたように，ゼータの零点分布は，実軸から離れた上の方では，どのゼータに関しても一律に GUE である．各ゼータの個性が反映されるのは，むしろ実軸に近い方の零点の分布であり，その意味で，いろいろな族 $\mathcal{F}$ に対して $W(X,\mathcal{F},\phi)$ を考え，それらが族によって別々の行列群の固有値分布で表されれば，それこそが，仮想的な大域モノドロミー群の存在を裏付ける根拠となり得るだろう．

私たちの希望は，$X \to \infty$ のとき

$$W(X,\mathcal{F},\phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W(\mathcal{F}) dx$$

となるような関数 $W(\mathcal{F})$ を見つけることである．以下に，そうした研究の例をあげる．これらの結果はカッツ，サルナック，ルドニック，ルオ，イバニッチという人々によるものである．ゼータの族としては以下のような 5 種類の例を考える．

1. $\mathcal{F} = \{\chi \mid \text{原始的指標 mod } q,\ \chi^2 = 1\}$．このとき $L(s,f) = L(s,\chi)$（ディリクレの L-関数）となり，導手 $c_\chi = q$ は通常の意味のディリクレ指標の導手と同一になる．

2. Δ をラマヌジャンのデルタ関数（$SL_2(\mathbf{Z})$ の重さ 12 のカスプ形式）とする．$\mathcal{F} = \{\Delta \otimes \chi \mid \chi \bmod q\}$ とする．L-関数として，
$$L(s,\Delta\otimes\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)\chi(n)}{n^{\frac{11}{2}+s}}.$$
を考える．この場合，$L(s,\Delta\otimes\chi)$ の関数等式の符合により，

族はさらに 2 つの部分族に分けられる．導手を $c_{\Delta\otimes\chi} = q^2$ とおく．

3. $\mathcal{F} = \{f \mid SL(2,\mathbf{Z})$ の重さ kの正則ヘッケ固有カスプ形式 $\}$ とおき，保型L関数の族を考える．例 2 と同様に，関数等式の符号により 2 つの部分族に分かれる．実際，符号は $k \equiv 0 \pmod 4$ の時は $+1$，$k \equiv 2 \pmod 4$ の時は-1 である．$c_f = k^2$ とおく．

4. $\mathcal{F} = \{f \mid \Gamma_0(N)$ の重さ k の正則カスプ形式 $\}$ とする．ここでは，newform のなす部分族に注目する．f の central character が自明であると仮定する．簡単のため N が素数であるとする．この部分族は関数等式の符号により，さらに 2 つの部分族に分かれる．導手を $c_f = N$ とおく．

5. $\mathcal{F} = \{\mathrm{Sym}^2 f \mid f \in$ Example 3$\}$ とおく．ここでは symmetric squared L-function $L(s, \mathrm{Sym}^2 f)$ を考える．これは，$GL(3)$ の自己双対カスプ形式 $\bar{f}$ の L-関数 $L(s,\bar{f})$ となり，3 次のオイラー積で表される．例 1 〜 4 はいずれも 2 次以下のオイラー積であった．その意味でこの例は，より高度な実例になっている．導手を $c_{\mathrm{Sym}^2 f} = k^2$ とおく．

たとえば例 1 について，カッツとサルナックは，以下の定理を証明した．

カッツ－サルナックの定理 2 [2].

$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-2,2)$ を仮定すると，$X \to \infty$ のとき，

$$W(X,\mathcal{F},\phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\omega(Sp,x)dx$$

となる．

ここで，$\omega(Sp,x) = 1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$ であり，これは Sp というランダム行列の固有値分布から得られる関数である．この定理は，

表 1: 大域モノドロミー（予想）

ゼータの族	大域モノドロミー	必要な仮定
例 1	$Sp(\infty)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-2,2)$
例 2 +	$\lim_{n\to\infty} SO(2n)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1)$
例 2 −	$\lim_{n\to\infty} SO(2n-1)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1)$
例 3 +	$\lim_{n\to\infty} SO(2n)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1) \subset^* (-2,2)$
例 3 −	$\lim_{n\to\infty} SO(2n-1)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1) \subset^* (-2,2)$
例 4 +	$\lim_{n\to\infty} SO(2n)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1) \subset^* (-2,2)$
例 4 −	$\lim_{n\to\infty} SO(2n-1)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1) \subset^* (-2,2)$
例 5	$Sp(\infty)$	$\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1,1) \subset^* (-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

ゼータをこの族の中で動かすと，実軸に近い零点の分布が Sp の固有値分布に次第に似てくることを伝えている．これにより，この族の「モノドロミー群」が $Sp(\infty)$ であることが予見されるのである．ただし，この定理にはルドニック－サルナックの定理と同様に $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ に関する仮定がついており，これが外せない限り，具体的な意味で零点分布をとらえたことにはならないとの見方もできる．

他の例についても，主定理はこれと同様の形で書ける．表 1 はそれをまとめたものである．表中，例 2 〜 4 については，関数等式の符号により分けた各部分族に対する結果を記している．「$\subset^*$」は，関連するゼータについての一般化されたリーマン予想の下では，仮定がこのように緩められることを表す．

なお，例 1 と例 2 については，ルビンスタインの数値計算により，それぞれ，$X \approx 10^{12}$，$X \approx 10^6$ に対し，$\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ の仮定の有無に関わらず，$W(X,\mathcal{F},\phi)$ の極限が上記の理論曲線に近づくことが確かめられている．

7 あとがき

ゼータの零点とは何か，その問いに対する答えはまだ出ていない．個々の零点が実際に何かの固有値として表されるのか，といった具体的な問いに対しては依然として答が全く見つからない状況である．

しかし，一見したところゼータとは全く関係ないように見えるランダム行列が，零点分布を表していることは驚きであろう．そしてさらに興味深いことは，ゼータの零点分布を支配する無限次元群らしきものが存在していそうなことである．定義の見当すらつかない大域モノドロミーの存在が予見され，具体的な群がはっきりと予想されるのである．これは，数学が決して形式的な論理から成り立っているのではないことを象徴的に表している．と同時に，ゼータの零点の奥深さを物語っているといえる．

ゼータの零点 — その正体がわかるのはいつのことだろう．

参 考 文 献

[1] N. Koblitz "p-adic numbers, p-adic analysis and zeta functions" Graduate Text in Math. 58 (1984) Springer

[2] N. Katz and P. Sarnak "Random matrices, Frobenius eigenvalues and monodromy" Colloquium Publications 45 (1999) Amer. Math. Soc.

[3] van de Lune, J., H.J.J. te Riele and D.T. Winter "On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip IV" Math. Comp. 46 (1986) 667-681

[4] H.L. Montgomery "The pair correlation of zeros of the zeta function" Proc. Symp. Pure Math XXIV (1973) 181-193

[5] A.M. Odlyzko “On the distribution of spacings between zeros of the zeta function.” Math. Comp. 48 (1987) 273-308

[6] Z. Rudnick and P. Sarnak “The n-level correlations of zeros of the zeta function” C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994) 1027-1032

[7] Z. Rudnick and P. Sarnak “Zeros of principal L-functions and random matrix theory” Duke Math. J. 81 (1996) 269-322

[8] F.K. Schmidt “Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p” Math. Z. 33 (1931) 1-32

[9] 黒川信重「リーマン予想」数学セミナー１９９９年１１月号 pp. 60-64

[10] 小山信也「ゼータ関数と量子カオス」数理科学１９９７年９月号 pp.45-50

[11] 小山信也「量子力学・幾何学・跡公式」数理科学１９９９年３月号 pp.15-22

[12] 小山信也「素数と素サイクル」数学セミナー１９９９年３月号 pp.42-27

え／中筋 麻貴