量子力学・幾何学・跡公式

小山 信也

1. 跡公式と量子力学

太古の昔，まだ学問なんてものがなかった頃，人々は木や石を使って火を起こしたり，鋭く研いだ石で道具を作ったり，そんな日常の営みから物理法則を無意識に体験していたことだろう．そうした体験から湧いた好奇心は，ニュートン力学として成就し，日常生活で感じる範囲の，マクロな意味での物理法則が，前世紀までに完成した．

二十世紀に入り，人々は量子力学という知恵に到達する．そこでは，物理量が作用素とみなされ，そのスペクトルが状態を表す量であるとされた．「作用素のスペクトル（固有状態）」というものが世界を記述する――太古の人々には想像すらできなかったであろうこの原理が，光や波に関する，ミクロな意味での物理学として認められ，より多くの現象を説明することが可能となった．

人々が太古の昔から体感していた学問は他にもあったであろう．たとえば，幾何学は，土地の測量に端を発すると言われているし，人々がものの個数を意識し，整除の概念に達した瞬間に整数論が始まったとも考えられる．数の世界にもまた，物理法則と同様に美しい法則が数多く存在し，それらを一つ一つ証明することで数学は発展してきた．

そうした素朴な段階から展開した数学を「数の世界のニュートン力学」とみなしてもよいだろう．

そんな数学の進展の中で，人々の多大な努力にも関わらず，今日なお解決されずに残っている難問がいくつかある．その最大のものが「リーマン予想」であり，現代の多くの数学者が「普通の方法では解けないのではないか」と感じているようである．では,「普通でない方法」ならば解決の可能性があるのか.「普通でない」とは，何を意味するのだろう――

そこで登場するのが跡公式である．鍵となる発想は「ゼータ関数の零点をスペクトルとして解釈すること」である．跡公式をゼータ関数の明示公式の類似とみなすことは，その昔にヒルベルトとポリャが提唱した，リーマン・ゼータ関数の零点をスペクトルと解釈するべきだ，という哲学に通ずる．

物理学が発展しながら，目で見える対象のみを扱う古典力学から，スペクトルを扱う量子力学へと進化したように，ゼータ関数論もまた，素数に渡るオイラー積という外見からは見えない，背後にあるスペクトルとの関わりが重要であると認識されるに至った．(これが「数の世界の量子力学」と解釈されることは，文献 5) で述べた.)

跡公式のめざましい応用の一つは，分布定理（素測地線定理）である．それは，量子力学や力学系でいう「周期軌道」，幾何学でいう「閉測地線」の分布に関する定理であり，整数論で知られている素数定理

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \text{誤差項}$$

と類似の事実である．ここで $\pi(x)$ は x 以下の素数の個数であるが，素測地線定理の場合は，閉測地線 p のノルムを $N(p)=\exp(p\text{ の長さ})$ とおき，$N(p)$ を素数の大きさに相当する数として考えた上で，ノルムが x 以下の素測地線の個数を $\pi(x)$ とおく．また，$\mathrm{li}(x)$ は

$$\mathrm{li}(x)=\int_2^x \frac{dt}{\log t} \tag{1}$$

で定義される関数であり，大まかな大きさは

$$\mathrm{li}(x)\sim \frac{x}{\log x} \tag{2}$$

となる．($\sim$ は，左辺を右辺で割った分数が $x\to\infty$ のときに 1 に収束することを意味する.) 定義式（1）の意義，及び，(2) よりも（1）の方がより正確で良い表示である理由は，文献 5) に詳しく述べたので，ここでは省略する．

本稿では，跡公式の効用のうち特に分布定理に着目し，どのような式からどのような過程で分布定理が得られるのか，また，そこにゼータ関数がどのように関係しているのかを概観する．素測地線定理と素数定理を比較しながら解説することで，素数と素測地線，またはゼータ関数の零点とスペクトルの不思議な類似の一端を紹介したい．

2. 跡公式

跡公式は，リーマン面 M 上の関数の集合に作用する積分作用素 L の跡（trace）を二通りに計算して等号で結んだ式である．リーマン面として，負定曲率のコンパクト面を考えるのが最もわかりやすい．この場合，複素上半平面 H が普遍被覆空間となり，M の基本群を Γ とおくと，$M=\Gamma\backslash H$ と書ける．L の積分核を $K(z,w)$ とおくと，L は，

$$Lf(z)=\int_M K(z,w)f(w)dw \tag{3}$$

と定義される．$K(z,w)$ は $M\times M$ 上の関数であるが，跡公式を導くには，$K(z,w)$ がより広い $H\times H$ 上で定義された関数 $k(z,w)$ を Γ の作用で「たたみこんで」（あるいは Γ に渡って平均して）作った形をしていることが必要である．さらに，$k(z,w)$ が，H の点を Γ の作用で動かしても値が変わらない（Γ-不変）という性質を満たすとき，すなわち，任意の $\gamma\in\Gamma$ に対し，

$$k(\gamma z,\gamma w)=k(z,w) \tag{4}$$

という性質が満たされている場合を考えるのである．

作用素 L は線型であり，イメージとしては無限次行列で表されるようなものである．有限次行列の (i,j)-成分が，i,j が自然数のみを動くのに対し，連続的に動く変数 z,w に対する (z,w)-成分が $K(z,w)$ であり，関数の値 $f(w)$ がベクトルの w-成分であると解釈すると，式（3）は行列とベクトルの積とみなされる．この解釈による無限次行列の跡は，対角成分の和（積分）

$$\mathrm{tr}(L)=\int_M K(z,z)dz \tag{5}$$

となる．これを，k を使って書き換え，(4) を用いて変形すると，Γ の元に渡る和となり，さらに，共役な元の寄与は同類項となってまとめられるので，最終的に，$\mathrm{tr}(L)$ は Γ の共役類に渡る和となる．共役類は，幾何学の言葉では M の閉測地線に対応し，量子力学・力学系の言葉では周期軌道に対応する．共役類の間には積が定義されないが，ベキは定義される．他の類のベキになっていないものを素共役類，あるいは素元と呼ぶ．閉測地線や周期軌道では，ベキは同じ軌跡を何周か繰り返し通ることに対応し，素元は一周に対応する．以下，素元の集合を P と書く．

$\mathrm{tr}(L)$ のもう一つの表示は，L の固有値の和である．各固有値はラプラシアンの固有値 λ を用いて $h(\lambda)$ と表せる．(ここで，$h(\lambda)$ は $k(z,w)$ から決まる関数で「k のセルバーグ変換」と呼ばれる.) この事実は全く自明でなく，セルバーグの原論文 14) の中でも主要な定理の一つである．この表示によれば，

$$\mathrm{tr}(L)=\sum_\lambda h(\lambda)$$

となる．右辺の和は λ がラプラシアンの固有値全体を渡る．ラプラシアンの固有値はセルバーグ・ゼータ関数の非自明零点であり，少し修正した関数 $\tilde{h}$ を用いて，ゼータの零点 ρ に渡る和として

$$\mathrm{tr}(L) = \sum_{\rho} \tilde{h}(\rho) \tag{6}$$

と書いても良い．以上をまとめると，跡公式は最終的に

$$\sum_{p \in P} [\text{各 } p \text{ の貢献（軌道積分）}] = \sum_{\rho:\,\text{零点}} [\text{各 } \rho \text{ の貢献（固有値）}] \tag{7}$$

という形になる．

k 及び h（または L）は，いろいろに取ることができ，具体的に関数 k または h を決めるごとに，跡公式として非自明な恒等式が得られることになる．それらの一つ一つが豊かな応用を持つのである．

そして，この跡公式（7）は古典的なリーマン・ゼータ関数の明示公式と似た形をしている．左辺の P として素元の代わりに素数の集合を考え，右辺ではセルバーグ・ゼータ関数の代わりにリーマン・ゼータ関数の零点を考えれば，(7) は解析数論における明示公式（explicit formula）に他ならない．そこで以下，P として，素元または素数の2通りの集合を考え，それに応じてセルバーグ・ゼータ関数またはリーマン・ゼータ関数を適宜考えることにする．

以下，$N(p)$ という記号は，p が素元の場合には前節で定義したノルムを表し，p が素数の場合には p そのものを表すものとする．

3. 分布定理

分布定理の証明は，ゼータ関数の複素関数論的な性質によるが，その方法は，一般的に二種類あるとされる．

第一の方法は，タウバー型定理を用いるものである．これは，ゼータ関数の収束限界における極とその留数を用いて，分布定理の主要項を得るものである．極と留数だけから得られるという点で広く有用な方法であるが，主要項以上に精密な結果を出すことはできない．

第二の方法は，明示公式によるものである．明示公式とは，分布定理が目的とする量

$$\pi(x) = \{x \in P \mid N(p) \le x\} \tag{8}$$

を，ゼータ関数の零点などを用いて誤差項まで含めて完全に書き切った公式である．より正確には，直接 $\pi(x)$ を表すのではなく，それに近い関数

$$\Psi(x) = \sum_{N(n)<x} \Lambda(n) \tag{9}$$

を扱う．ここで右辺は，全ての（素と限らない）自然数もしくは閉測地線 n に渡る．また，$\Lambda(n)$ はマンゴルトの関数であり，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log N(p) & n = (p\text{ のベキ}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{10}$$

で定義される．(P が素測地線，周期軌道のときは「その他」は起こり得ない．) $\Psi(x)$ は，ほぼ（$\log x$ のような小さな項を除いた x のオーダーとしては）$\pi(x)$ に等しいことが知られている．そこで，$\Psi(x)$ の評価式を与えることが目標となる．

この第二の方法は，誤差項まで含めて分布の挙動を完全に把握できるという点で長じている．また，ゼータ関数の極だけでなく，全ての零点が算入されており，より深い意義を表している．

以下，跡公式を Ψ の明示公式とみなすことにより，素元分布とゼータ関数の零点分布（あるいはラプラシアンの固有値分布）の関係をみていこう．

4. Ψ の明示公式

分布定理のためには，跡公式を以下の形で用

いる．

$$\Psi(x) = x + \sum_{\rho:|\mathrm{Im}(\rho)|\le T} \frac{x^\rho}{T} + O\left(\frac{x}{T}(\log x)^2\right) \tag{11}$$

右辺第二項の ρ は，ゼータ関数の零点のうち，虚部が T 以下のものに渡る和である．実数の零点（自明な零点）は虚部が 0 であるから全て算入されるが，x^ρ の絶対値が十分小さくなるため，第三項の誤差項に吸収させてしまうことができる．したがって，実質的に第二項の $\sum$ は有限和となる．この右辺が,（７）の右辺に相当する．一方（１１）の左辺は，定義によってノルムが x 以下の元に渡る和であるが，各素べきの寄与を素元ごとにまとめて考えれば，素元に渡る和となり,（７）の左辺の形になる．したがって，式（１１）は跡公式（７）の形をしており,（７）の特別な場合であることがわかる．

P が素数の集合の場合,（１１）はリーマン・ゼータ関数論で良く知られた明示公式である．一方，P が素測地線などの素元の集合である場合,（１１）を証明するには，跡公式の k や h を,（７）が（１１）の形になるような関数として選べば良く，$\Gamma = PSL(2,\mathbf{Z})$ の場合に，イバニッチ[*1)]により証明されている．

それ以外の Γ で（１１）を証明することは重要な問題であるが，素元のノルムが特定の範囲に集中する可能性をどうやって回避するかという，いわば技術的な問題があり，現在のところ証明されていない．しかし,（１１）が証明されていない場合においても，素元分布の状況とゼータの零点の関係については，以下に述べることは全て成立することがわかっている．すなわち，公式（１１）は，素元分布とゼータ関数の関係を見やすくするための一つの表現法であり，そうした表現ができない場合でも，素元分布そのものについては跡公式（７）の原型を詳しくみることで証明がなされるのである．その解析は非常に複雑であるので，ここでは省略する．

*1) 文献 2) Lemma 1

そこで，本稿では（１１）を説明の手段として用いる．明示公式（１１）の成立を仮定した上で，分布定理とゼータ関数の関わりをみていく．厳密には P が素数の集合または $\Gamma = PSL(2,\mathbf{Z})$ の場合に限った話となるが,（１１）を経由せずに結論だけをみるならば，以下に述べる状況は一般的に成立していることである．

5. 明示公式を用いた精密化

明示公式（１１）の右辺第一項は $\pi(x)$ の主要項を与え，誤差項は第二項と第三項から出る．式中の T は，第二項の和の範囲を表し，T が大きければそれだけ誤差としての第三項が小さくなることを意味している．逆に T が小さければ第二項は小さくなるが，第三項は大きくなる．従って，第二項と第三項が等しくなるような T が，全体として最小の誤差項を与える．そのような T を求めるため，第二項の和を評価してみよう．

まず，分子の x^ρ の大きさは，$x^{\mathrm{Re}(\rho)}$ である．したがって，零点の実部 $\mathrm{Re}(\rho)$ が重要となる．そこで，零点の実部の上限を e とおく．リーマン予想は $e = 1/2$ である．$e = 1$ だと，誤差項は主要項と等しくなり，もはや誤差項としての意味がなくなってしまう．e の値が 1 より小さいことを証明する問題は，リーマン・ゼータ関数に関しては未解決である．したがって，素数定理に関して，主要項以外の項は求められていない．

以下，セルバーグ・ゼータ関数，素測地線定理の場合を扱う．その場合，有限個の例外的零点を除いた全ての零点の実部が 1/2 であることが知られている．したがって，$e < 1$ であり，それに応じて精密化が可能であり，素測地線定理は以下に示すように，

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1+e}{2}+\epsilon}) \tag{12}$$

と誤差項の評価を含んだ形に書ける．なお，ϵ は,「任意の $\epsilon > 0$ についてその式が成立する」

という意味である．(以下，本稿で ϵ という文字は全てこの意味で用いる．)

（１１）から（１２）がどのようにして導けるのかを説明する．まず，(１１）の右辺第二項の和を評価してみよう．第二項は，$\rho = e + ir$ とおいたときの絶対値よりも小さい，すなわち，

$$x^e \left| \sum_{r:|r|<T} \frac{x^{ir}}{T} \right| \tag{13}$$

で押えられる．ここで r に渡る和には大きなキャンセルが起きている可能性があるが，仮にキャンセルを一切考えず，和の各項の絶対値を取り，$|x^{ir}| = 1$ と評価してみると，和に参加する r の個数は T^2 のオーダーであること（ワイルの法則）から，T が一つ約分されて，第二項は $O(x^e T)$ となる．これが第三項と等しいオーダーになるのは $T = x^{\frac{1-e}{2}}$ のときであり，これを代入して（１２）を得る．

（１２）は，$e = 1/2$ の場合には

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon}) \tag{14}$$

となる．これが，セルバーグ・ゼータ関数のリーマン予想を仮定した場合の素測地線定理であり，第二項のキャンセルを一切考えずに得たという意味でその誤差項 $O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon})$ は「自明な評価」と呼ばれる．

以上の過程からわかるように，零点の虚部に渡る和 $\sum_{r:|r|<T} x^{ir}$ のキャンセルをどれだけ正確に抽出できるかが，さらなる素測地線定理改善の鍵となる．そして，こうしたキャンセルの発生は，零点のばらつき具合によるものであることに注目すべきであろう．x^{ir} は単位円周上の点であり，r を渡らせると原点から放射状に分布する複素数であるから，その和には相当なキャンセレーションが起きていると考えられる．しかし，具体的にそのキャンセレーションの存在を証明し，大きさを求めることは難しいのである．

まだ証明されていないことであるが，一般に，セルバーグ・ゼータ関数の零点（すなわちラプラシアンの固有値）は，ある意味でランダムに分布しており，和 $\sum_{r:|r|<T} x^{ir}$ は十分多くのキャンセレーションを含み，ほとんど有界になるだろうと考えられている．それが真実なら，上述の論証により，素測地線定理の究極の精密化

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{15}$$

が得られることになる．すなわち，誤差項の指数 3/4 を改善し，究極の予想 1/2 に近付けるためには，零点のより詳しい分布，それも量的な分布ではなく，ランダム性を計れるようないわば質的な分布が必要となるのである．

私たちはこれまで，ひたすら $\pi(x)$ や $\Psi(x)$ を正確に求めようとしてきた．私たちの目標は，素元の個数を正確に求めるという，いわば量的な分布であったわけだが，それを突き詰めた結果，零点の質的な分布を解明する必要性に到達したわけである．

6. 零点の質的分布への試み

和 $\sum_{r:|r|<T} x^{ir}$ のキャンセルを実際に得ることは一般には非常に難しい．ごくわずかな改善に初めて成功したのはイバニッチ 2) である．彼は $\Gamma = PSL(2, \mathbf{Z})$ の場合に，セルバーグ・ゼータの零点（ラプラシアンのスペクトル）に渡る和を，種々の数論的な量（クルースターマン和やベッセル関数の積分）で書き換える「クズネツォフ公式」を用いて変形した．(クズネツォフ公式文献 7) で証明されている．) そしてその際，保型Ｌ関数の値の新しい評価を用いた．これによって得た定理は

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{35}{48}+\epsilon}) \tag{16}$$

であった．

これをさらに改善したのが，ルオとサルナックである．彼らは文献 9) において数論的量子カオス（文献 4, 15) に詳しい）を推進する過程で，量子エルゴード性の証明中に保型Ｌ関数の究極的な評価（平均リンデレーフ予想）を得ることに成功した．これをイバニッチの方法と合

わせることにより，

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon}) \qquad (17)$$

を得た．

以上の方法において，評価のポイントは保型L関数の非自明な評価を得る点にある．L関数の究極の評価はリンデレーフ予想（未解決）によって表され，ルオとサルナックはそれ自体を証明せずにそれと同等な評価を与える式（平均リンデレーフ予想と呼ばれている）を証明して利用した．従って，L-関数の評価という観点でみると,（１７）の誤差項 $O(x^{\frac{7}{10}+\epsilon})$ はこの証明法による限りベストであり，これ以上改善することは（全く別の新しい方法を発見しない限り）不可能である．

なお，以上の結果は $SL(2,\mathbf{Z})$ の合同部分群に関しても同様に成立する．証明には，文献 1, 11) でなされているクズネツォフ公式の合同部分群への一般化を利用すれば良い．合同部分群に関してはモジュラー群のようにリーマン予想（$\frac{1}{4}$-固有値予想）が解決されているわけではないが，近年ルオ，ルドニック，サルナックの三名の共著論文 8) によって３０年振りに更新された第一固有値の評価 $\lambda_1 \geq 0.21$ をリーマン予想の代わりに用いることにより証明が可能となる．また，この結果は，筆者 6) により，数論的コンパクト面に一般化された．

7．ランダム行列理論と跡公式

零点の個数を評価する量的分布だけでなく，その質的分布（ばらつき具合）が重要であることをみてきたが，ばらつき具合の定式化にはいろいろな方法が考えられる．その一つの方法は前節までに述べてきた指数和のキャンセレーションを評価する方法であったわけだが，本節ではもう一つの方法として，最近ランダム行列との関連で脚光を浴びている「間隔分布」を考える．

本節の後半では，ルドニックとサルナックによる主結果の概要を述べるが，驚くべきことに，主定理の証明で本質的に重要な役割を果たすものが，またしても跡公式なのである．

まず，間隔分布の定式化の方法を説明する．正数列 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ の間隔分布を以下に定義する．量的分布には興味がないので，T 以下の元の個数が漸近的に T 個であると正規化して考える．間隔分布は，$\mathbf{R}$ 上の測度として，

$$\mu(N)\ \left(= \mu(\lambda_0, \cdots, \lambda_N)[a,b] \text{ とも書く}\right) = \frac{1}{N}\#\left\{0 \leq j \leq N-1 \mid \Delta_j \in [a,b]\right\}$$

$$\left(\text{ただし}, \Delta_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j\right)$$

で定義される．Nを限りなく大きくしたとき，これがどんなモデルの測度に近づくかにより，その質的分布を表す．量的分布が前世紀から考えられてきた古典的な問題であるのに対し，質的分布は７０年代以降になって初めて予想が提出された分野であり，今日に至るまで完全に証明されたものはない．

表１は，素数または素測地線 p のノルムに関し，その質的分布の予想を表したものである．

表１の中段，素数の分布については，p_j を j 番目の素数とすると，素数定理により，素数列の正規化は

$$\lambda_j = \frac{p_j}{\log p_j}$$

によってなされる．10^{12} くらいまでの素数に対する数値計算により，

$$\mu(N) \to e^{-x}dx$$

と予想される．(文献 3) Figure 1) この収束先はランダム分布から得られる測度に一致する．これより素数分布はランダムであろうと推察される．

表１　素数または素元のノルムの分布（予想）

p	$N(p)$ のばらつき具合
素数	ランダム
素測地線	不明（数論的なら high degeneracy）

次に，表１の下段，素測地線のノルムの間隔分布は全く不明であり，予想すらない．ただし，多様体が数論的な場合は，閉測地線の長さが整数などの離散的な数で表されるため，そういう点に値が集中する．従って，ある長さの素測地線がたくさん重複して存在し，その近傍には全く存在しない，といった現象 (high degeneracy) が起きる．

次に，ゼータ関数の零点に関し，ばらつき具合という観点から分布をみてみよう．この場合も，完全に証明された場合はなく，いずれも予想である．(表２)

リーマン・ゼータ関数の零点（表２の中段）について，ルドニックとサルナックの論文 12) の主定理を説明する．彼らの論文中ではリーマン予想を仮定していないが，ここでは簡単のためリーマン予想を仮定して説明する．リーマン・ゼータ関数の虚零点の列を

$$\rho_j = \frac{1}{2} + \gamma_j\sqrt{-1}$$

$(0 < \gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots)$ とおく．$N(T)$ の正規化は

$$\tilde{\gamma}_j = \frac{\gamma_j \log \gamma_j}{2\pi}$$

によってなされる．オドリズコの数値計算（文献 10)，文献 5) 図５に転載）によれば，

$$\mu(N) \to \text{ GUE}$$

と予想される．この実験は，モンゴメリの１９７０年代における先駆的な研究に端を発しているため，モンゴメリ・オドリズコの法則 (Montgomery-Odlyzko Law) と呼ばれている．ルドニックとサルナックは，これを証明するには n-階相関関係

$$R^{(n)}(f,N) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n) \\ \text{各成分は異なる}}} f(\tilde{\gamma}_{j_1}, \ldots, \tilde{\gamma}_{j_n}) \tag{18}$$

を考えれば良いことを見出した．ここに，fは

表２　ゼータ関数の零点の分布（予想）

p	ゼータ	零点のばらつき具合
素数	Riemann zeta	GUE
素測地線	Selberg zeta	GOE, ポアソン

n 変数関数であり，以下の３条件を満たすものである．

1. $f(x_1, \ldots, x_n)$ は対称式
2. 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し
$$f(x_1 + t, \ldots, x_n + t) = f(x_1, \ldots, x_n)$$
3. 超平面 $\sum_j x_j = 0$ 上で $|x| \to \infty$ としたとき，$f(x) \to 0$（急減少）

これらの条件の必然性及び，n 階相関関係が間隔分布を表す理由に関しては，文献 5) に詳しく述べたので，そちらを参照されたい．彼らが文献 12) において証明した主定理は以下の通りである．

定理１ **(Rudnick-Sarnak)** $\hat{f}$ をフーリエ変換とし，$\delta(x)$ を $x = 0$ における Dirac mass とする．

$$W_n(x) = \det\left(\frac{\sin \pi(x_i - x_j)}{\pi(x_i - x_j)}\right)$$

とおく．

$$\mathrm{supp}(\hat{f}(\xi)) \subset \left\{ \sum_j |\xi_j| < 2 \right\}, \tag{19}$$

の下で，

$$R^{(n)}(f, B_N) \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x) W_n(x) \delta\left(\tfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n \quad (N \to \infty)$$

が成立する．

ここで仮定されているサポート条件（１９）が外せれば，Montgomery-Odlyzko law を証明できたことになるが，現在のところその見込みはない．しかし，この定理は理論的アプローチが難しいと思われていたこの問題に初めて数学的に近づいた結果であり，画期的なものである．

この定理の証明もまた，跡公式 (explicit formula) によるものである．多変数版を考えるこ

とにより，容易に

$$\sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\\ \text{互いに異なる}}} = \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_n)\\ \text{素数の組}}} \tag{20}$$

というタイプの跡公式を得ることができる．n 階相関関係の定義式（１８）を，この跡公式（２０）を利用して素数に渡る和に書き換える．その後，複雑な組み合わせ論的計算を経ることにより証明するのである．

なお，定理１は，彼ら自身の手により，文献 13) において保型 L-関数の零点分布に一般化されている．

8. まとめ

私たちが数学や物理学で知りたいと願っているものは，素数や素粒子，素測地線・周期軌道といった「素なもの」であるが，跡公式は，そうした素なものたちを，ゼータ関数の零点やラプラシアンの固有値という研究対象に結び付ける関係式である．

跡公式の応用により，ゼータ関数の零点に関する情報を用いて，素なものが「どれくらいあるのか」という量的分布を，ある程度解明することができる．

さらに，こうして得られた量的分布を精密化するには，ゼータ関数の零点が「どのようにあるのか」という，いわば質的分布が必要である．そして，質的分布を解明する過程で，再び跡公式が本質的な役割を果たすのである．

以上，分布定理という切り口を中心に，跡公式が果たす役割をみてきた．跡公式は，数学と物理学の双方において，他に替え難い有用な道具である．

だが，これまでにみてきた様々な現象が，一見無関係にみえる素数と素測地線で共通して成立する理由は，全くわかっていない．それは深い謎であると同時に，未知の構造が数学・物理学の枠を越えて横たわっている可能性を感じさせる．将来，その謎が解明できたとき，ゼータの零点はスペクトルとして解釈され，私たちはリーマン予想の解決を目にするのであろう．

跡公式は，夢を描くための画材でもあるのだ．

参考文献

1) J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, Invent. Math. 70 (1982/83) 219-288
2) H. Iwaniec, Prime geodesic theorem, J. Reine Angew. Math. 349 (1984) 136-159
3) N. Katz and P. Sarnak Zeros of zeta functions, their spacings and their spectral nature (preprint) (1997)
4) 小山信也：「散乱行列式と数論的量子カオス」，数理科学 4月号（1995）46-53
5) 小山信也「ゼータ関数と量子カオス」数理科学９月号（1997）45-50
6) S. Koyama, Prime geodesic theorem for arithmetic compact surfaces, International Math Research Notices 8 (1998) 383-388
7) N.V. Kuznetsov, Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums, Math. USSR Sb. 39 (1981) 299-342
8) W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, On Selberg's eigenvalue conjecture, Geom. and Funct. Anal. 5 (1995) 387-401
9) W. Luo and P. Sarnak, Quantum ergodicity of eigenfunctions on $PSL_2(\mathbf{Z})\backslash H^2$ 207-237 , I.H.E.S 81 (1995)
10) A. M. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. Math. of Computation 48 (1987) 273-308
11) N.V. Proskurin, The summation formulas for general Kloosterman sums, J. Soviet Math. 18 (1982) 925-950
12) Z. Rudnick and P. Sarnak, The n-level correlations of zeros of the zeta function, C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 1027-1032
13) Z. Rudnick and P. Sarnak : "Principal L-functions and random matrix theory", Duke Math J. 81, (1996) 269-322
14) A. Selberg, Harmonic Analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Ind. Math. Soc. 20 (1956) 47-87
15) P. Sarnak : "Arithmetic Quantum Chaos", Israel Math Conference Proc. 8 (1995) 183-236

（こやま・しんや，慶應大学）