数学セミナー 1999.3

素数と素サイクル

小山 信也 （慶應大）

1 土の中の数学

数学の難問にぶつかったときの私たちは、ミミズかモグラかあるいはアリに姿を変えられ、土の中に閉じ込められてしまったようなものである。真っ暗で何も見えず、方角も全くわからぬまま、もがき続ける。運が良ければ植物の地下茎に当たり、それをつたって地上に出られるかもしれない。最初に地上に出た瞬間は、まぶしくて何が起きたのか良くわからないだろう。しかし次第にその明るさに慣れ、一気に世界がひらけてくると、そこに問題の解決が見えるのである。

土の中でうごめく私たちに、しばしば問題解決への希望を与えてくれるものが、アナロジーである。ここでは「素数の分布問題」という未解決問題を例にとり、それが「素サイクルの分布問題」という別の問題と似ていることを紹介する。そのことが、素数の謎を解こうとする土の中の私たちに一条の光を与えてく

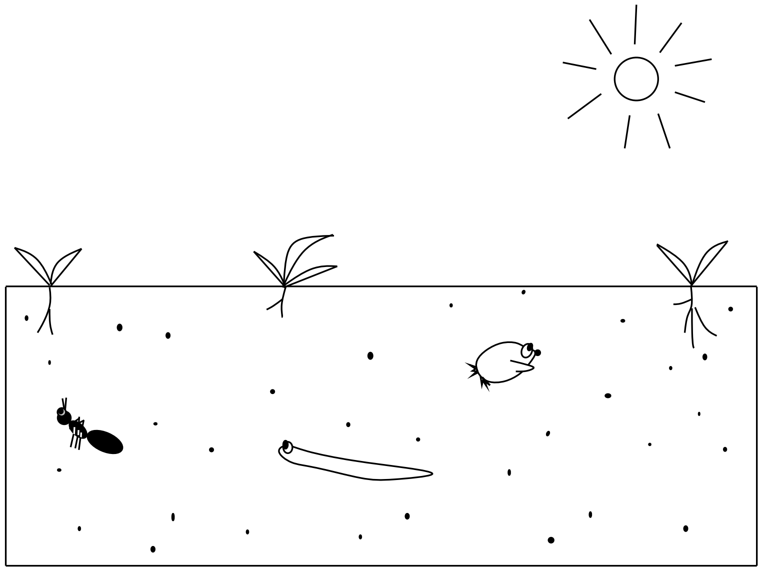

図 1: 土の中でうごめく私たち

れるのである。ここで「問題が似ている」とは、過去に部分的に解決されてきた範囲でわかっている式が、完全に同じ形をしているという意味である。したがって、将来解明されるかもしれない未解決部分に関しても、この二つの問題では同じ現象が成り立っていると期待されるのである。この二つの問題はどちらも未解決の難問であるが、素サイクルの方が、素数の分布問題よりも少し易しい。素数で未解明であることが、素サイクルに関して少しは解明されている。そのため、素数の謎を解明したい場合、素サイクルの分布問題の進展は参考になるのである。

ところで、その二つの問題が似ていることには、何か理由があるのだろうか。素数と素サイクルは、それ自体はもともと互いに無関係なものである。素数は数であり、素サイクルは図形の上に書かれた曲線であるから、由来も全く異なる。もともと出所が違うのだから、いくら似ていたとしても、それは単なる偶然なのかもしれない。あるいは、まだ私たちが知らない深い関

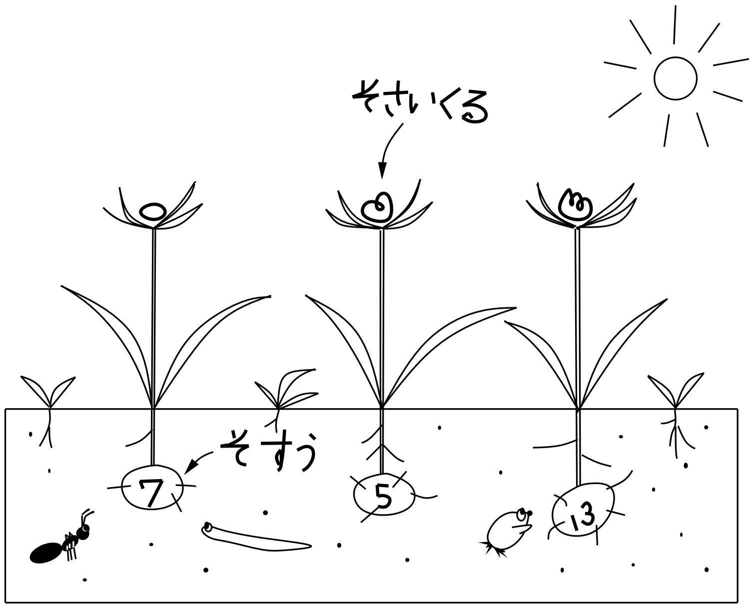

図 2: 素数の球根と素サイクルの花

係が、素数と素サイクルの間に横たわっているのかもしれない。

もしその関係が解明されたなら、そのときに間違いなく私たちは地上に出ることができるのであろう。そして、土の中で行き当たった素数の球根からゼータという茎が伸び、その先に素サイクルの花が咲く美しい光景を目にすることができるのかもしれない。

2 球根 —素数—

素数はどれくらいたくさん存在するのだろうか—これは古くから人々を魅了し、悩ませてきた問題である。素数が無限にたくさん存在することは、古代ユークリッドの時代に既に証明されていたが、より正確に「自然数全体のうち、どれくらいの割合で素数が存在しているのか」という問題は、現代数学の主要な未解決問題となっている。割合といっても「自然数全体のうち何

％が素数である」というような単純なしくみが成り立っているわけではない。たとえば、１から１０までの数のうち素数は２、３、５、７の４個で４０％を占めるが、１から１００までだと素数の割合は２５％くらいに落ちてしまう。数が大きいほど素数の割合は小さくなるのである。

　したがって、素数の割合は数 x の大きさによって変化する値となる。そこで、$\pi(x)$ を

(1) $$\pi(x) = (x \text{ 以下の素数の個数})$$

とおき、これを x の式としてできるだけ正確に表すことが問題となる。

　その完全な表示を得ることは未解決であるが、今から百年余り前に証明された素数定理によれば、

(2) $$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

が知られている。ここで $\sim$ という記号は、左辺と右辺の比が $x \to \infty$ のときに１に収束するという意味である。この $\sim$ という関係は「無限大での振る舞いが等しい」という感覚であるが、これをもう少し正確にいうと「最高次の項が等しい」となる。たとえば、$f(x) = x^2 + 2x + 3$ という式の最高次の項を表す式が $f(x) \sim x^2$ であり、その下の１次の項を表す式が $f(x) - x^2 \sim 2x$ である。

　ただし、式が $x \log x$ のように必ずしも多項式でない場合、「最高次」という用語は文字通りでは当てはまらないから「$x \to \infty$ のときに最も大きくなる項」と解釈しなおす必要がある。これを「主要項」または「初項」と呼ぶ。これに対して、それ以外の項を「誤差項」または「第二項」と呼ぶ。

　したがって、素数定理（２）は $\pi(x)$ の主要項のみを与えてい

る定理である。（２）の右辺は部分積分により

$$\frac{x}{\log x}+\frac{x}{(\log x)^2}+\frac{2x}{(\log x)^3}+\cdots \tag{3}$$

のように分母の $\log x$ の次数が高くなる級数に展開される。したがって、（２）の右辺で与えた主要項はさらにその中の主要項 $\dfrac{x}{\log x}$ と誤差項に分かれる。その意味では、

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x} \tag{4}$$

とも表される。素数定理を初めて見る人には、こちらの表示の方がわかりやすいかもしれない。（これらの表示の意義の違いは、文献１に詳しい。） x 個の数のうち素数が $\dfrac{x}{\log x}$ 個あるのだから、直感的には「x くらいの大きさの数が素数である確率はだいたい $\dfrac{1}{\log x}$ である」ということになる。

実際には（３）の分母の $\log x$ は x が大きいときには分子の x に比べて非常に小さく、その意味では、これらの分数はすべて「ほぼ x の１乗に等しい」といえる。実際、x の指数を少しでも下げた項 $x^{1-\delta}$ は、δ がどんなに小さな正数であっても（３）のどの項よりも小さくなる。したがって、式（３）を全部合わせて「x のほぼ１乗」とみなすことができ、これらをまとめて素数定理の主要項とみなす習慣がある。

3　花 —素サイクル—

数学には様々な分野がある。先ほど述べてきた素数を扱う数学を整数論といい、図形を扱う数学を幾何学という。整数論と幾何学はもともと全く別の興味から起こったものであっただろうが、現代の数学では、それらがお互いの理論の深いところでつながっているという不思議なことがしばしば起こる。

以下に、先ほど述べた素数に関する事実に良く似た現象が、幾何学において成り立っている事例を紹介する。

まず、図形に対して、その図形上に線を描くこと考える。遠回りや無駄な動きをしない線だけを描くことにする。こういう線を測地線という。測地線は、普通の平面内の図形ならば直線と同じであるが、図形そのものが曲がっている場合にはそうとは限らない。たとえば球面上の測地線は大円であるし、もっと複雑な図形をいろいろ考えると、その図形上の測地線としていろいろな形のものが現れる。

測地線のうち、同じ軌道を繰り返すものをサイクルという。平面上にサイクルはないが、たとえば球面は大円をサイクルとして持つ。また、トーラス（ドーナツ面）のサイクルとしては、らせん状に巻きついた曲線なども考えられる。サイクルの一周の軌道を素サイクルという。この素サイクルが素数に似ているとは、外見からは想像できないだろうが、一つの図形に対する素サイクルの周の長さの分布を考えると、以下に述べるように、素数の分布と全く同じ状況が成立しているのである。

図形 M を一つ固定し[1]、素サイクル p の周の長さを $l(p)$ とおく。素数の代わりに $e^{l(p)}$ という実数を扱うのであるが、長さ $l(p)$ それ自体を扱わずに指数に乗せた $e^{l(p)}$ を扱う理由は、素サイクルを素数の類似物ととらえるために、素でないサイクルも含めて全体としてうまく対応させる必要があるからである。たとえば p を 2 周するサイクルは素でないが、それは素数の 2 倍ではなく 2 乗に対応していると考えたい。なぜならば、素数は乗法的な生成元（掛け算のもとになるもの）であり、素でないものは素数をいくつか掛けたものだからである。2 周するサイクルの長さは $2l(p)$ であるが、これは素数の 2 乗に対応するものであるから、素サイクルの 2 乗になる方が自然である。 $e^{l(p)}$ を扱うことにしておけば $e^{2l(p)} = (e^{l(p)})^2$ となり、うまく 2 乗になる。

[1] 図形 M の種類によって数式の細かな部分や状況が異なるため、本稿での説明は負定曲率のコンパクト・リーマン面に対して行う。曲率が一般の場合や多様体の次元が高い場合にも適当な条件下で類似の事実が成り立つ。

なお、e である必要はなく、1より大きなどんな数でもよい。以下、$e^{l(p)}$ のことを素サイクル p のノルムと呼ぶ。

素数のときに式（1）で定義した $\pi(x)$ に対応する関数を、図形 M に対して

$$\pi_M(x) = (\text{ノルムが } x \text{ 以下の素サイクルの個数}) \tag{5}$$

と定義する。すると、素数定理（2）と全く同じ形の定理

$$\pi_M(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \tag{6}$$

が成立する。これを素測地線定理と呼ぶ。これが（3）のような展開を持ち、（4）のような表示を持つことも全く同様である。

そしてさらに興味深いことは、素数定理（2）と素測地線定理（6）の双方について、誤差項を求める問題は重要で未解決であるが、そのどちらにもそれぞれゼータ関数というものが重要な鍵となっていることである。

4　茎 —ゼータ関数—

素数定理の誤差項は未解決であり、まだわかっていない。しかし、それはリーマン・ゼータ関数の零点を用いて表すことができる。リーマン・ゼータ関数とは

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \tag{7}$$

という、素数 p に渡る無限積で定義される関数である。s は複素数の変数であり、$\zeta(s) = 0$ となるような複素数 s を$\zeta(s)$ の零点と呼ぶ。零点は無限にたくさんあることが知られている。

素数定理の誤差項は、x の何乗の項なのであろうか。実は、その次数は $\zeta(s)$ の零点の実部の最大値（正確には上限）に等しいのである。すなわち、

$$\rho = \sup\{\mathrm{Re}(s) \mid \zeta(s) = 0\} \tag{8}$$

とおくと、誤差項は x^ρ の形をしている。ρ の値を求める問題は未解決である。これまでに $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ であることしかわかっていない。$\rho = 1/2$ であることが広く信じられており、リーマン予想と呼ばれている。リーマン予想は、現代数学の最大の未解決問題であるといわれている。

以上が素数定理の誤差項とゼータの関係であるが、こうした状況は以下に述べるように、素測地線定理の誤差項についてもほとんど同じく成立しているのである。素サイクルの場合には、p の代わりに $e^{l(p)}$ を考えるのであったから、（７）に似せて図形 M のゼータ関数を作ると

$$\zeta_M(s) = \prod_p (1 - e^{-sl(p)})^{-1} \tag{9}$$

となる。これはセルバーグ・ゼータ関数と呼ばれている。そして、素測地線定理の誤差項は、素数の場合と同様に $\zeta_M(s)$ の零点の実部の最大値を用いてある程度表すことができるのである。

すなわち、

$$\rho = \sup\{\mathrm{Re}(s) + 1 \mid \zeta(s) = 0\} \tag{10}$$

とおくと誤差項は $x^{\frac{\rho+1}{2}}$ と表される。ここで ρ を求める問題が未解決である点、そして $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ が成立しているという状況、さらに $\rho = \frac{1}{2}$ というリーマン予想が信じられている点に至るまで、素数とそっくりの現象が見られる。

素数の場合と違うのは、$\rho > \frac{1}{2}$ とさせてしまうような零点 s は有限個しかないことが既に証明されているという点である。すなわち（１０）で零点 s の集合に渡って上限を取るときに、少数の例外的な零点を除いて考えれば必ず $\rho = \frac{1}{2}$ となるのである。こうした状況を称して「セルバーグ・ゼータ関数のリーマン予想はほとんど成立している」という。

この意味で、素測地線定理は素数定理よりもやさしいと考え

られている。実際、いろいろな M に対して誤差項の精密化が活発に研究されており、現在も日々進展を遂げている。（進展の具体的内容や精密化の方法は文献２に詳しい。）これは、素数定理の誤差項の次数を下げるという未解決問題への示唆を与え得るものと思われる。

5　あとがき

容姿が完全にそっくりな二人の人間に出会ったら、誰もが驚くだろうが、もし、その二人が双子であったことを知ったなら「どうりで」「なるほど」と納得するに違いない。素数と素サイクルが似ていることを知った私たちは、今、驚いているところであるが、もし将来、素数を素サイクルとして持つような新たな図形が発見され、「実は素数は素サイクルの一種であった」ということがわかったとしたら、この不思議なアナロジーの理由が完全に解明されることになる。

その図形こそは、整数論あるいは数学のすべてを知り尽くした、究極の多様体なのかもしれない。

参考文献

1. 小山信也「ゼータ関数と量子カオス」数理科学１９９７年９月号

2. 小山信也「量子力学・幾何学・跡公式」数理科学１９９９年３月号

え／中筋 麻貴