セルバーグ予想[1]

小山 信也 （慶應大）
koyama@math.keio.ac.jp

1　かいま見た景色

その時セルバーグが見たものは、ブラインド越しの幾筋かの景色であった。窓の向こうには「非コンパクト面のラプラシアンの固有値」という風景が広がっていたが、１９５３年のこの瞬間まで、それを見た者はまだ誰もいなかった。セルバーグは世界で初めて、合同型の非コンパクト面の様子をかいま見ることに成功したのであった。完全に閉じていたブラインドから、合同型が見えるところの羽を取り去ったのである。それは数ある非コンパクト面のうちのごく一部であり、目の前に全景が広がったわけではなかったが、細いどの隙間からも、たしかに固有値が一列に並んで輝いていた。「全景はもっとたくさんの固有値で散りばめ

[1]数学セミナー １９９８年8月号掲載

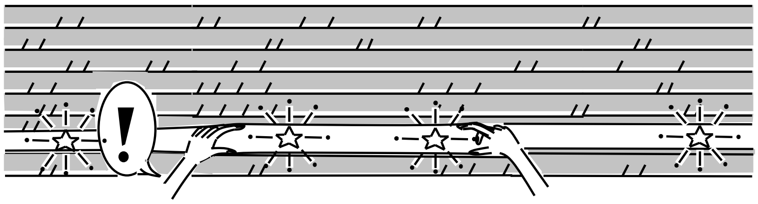

図 1: ブラインドの隙間に輝く点列

られているに違いない」••• セルバーグは、このように全貌を予想した。これが本稿で取り上げる「セルバーグ予想」(フックス群に対するラプラシアンの固有値存在予想）である。

2　ラプラシアン

「ラプラシアンの固有値」とはどんなものであるか、トーラスを例に説明しよう。平面上の平行移動の全体は、二次元ベクトルの全体とみなされるから $\mathbf{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbf{R}\}$ である。このうち、x,y が共に整数であるような平行移動からなる部分集合は $\mathbf{Z}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbf{Z}\}$ である。平面内の点同士は、各座標の小数部分が等しければ $\mathbf{Z}^2$ の元による平行移動で移り合う。したがって、単位正方形 $[0,1) \times [0,1)$ は $\mathbf{Z}^2$ の元で移すと平面全体を覆い、しかも単位正方形内の点同士は $\mathbf{Z}^2$ の元で移り合わない。このような性質を持つ領域を、$\mathbf{Z}^2$ の基本領域という。単位正方形は $\mathbf{Z}^2$ の基本領域の一つの表し方であるが、他に例えば面積 1 の平行四辺形などでも基本領域を表せる。この単位正方形は、x,y 軸上の辺は含んでいるが、$x=1, y=1$ 上の辺は含んでおらず、x,y 軸上の辺と同一視される。したがって、基本領域を一つの曲面として見ると図のようなドーナツ面になる。これをトーラスと呼ぶ。

このように、数学では曲面を考える際に、まず平面のような

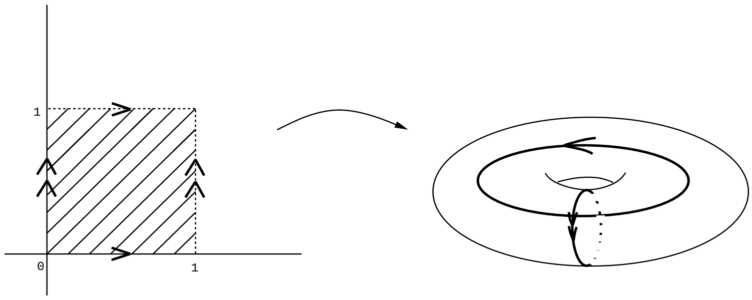

図 2: トーラス

大きな空間（普遍被覆空間）を考え、そこに平行移動のような集合（基本群）が作用していると考えて、その基本領域として曲面をとらえることが多い。セルバーグ予想では、$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{Z}^2$ の代わりに別の集合を扱うが、曲面を基本領域として見る考え方は一緒である。

さて、$\mathbf{R}^2$ のラプラシアンというものがある。それは

$$\Delta = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)$$

という微分作用素である。ラプラシアンの固有値とは、ある関数 f について

$$\Delta f = \lambda f$$

となるような λ のことであるが、固有関数 f を基本領域上の関数に限定することにより、固有値の分布に面白い性質が現れるのである。例えば、トーラス上の関数は、x, y を整数だけ動かしても値が変わらないという性質を持つから $e^{2\pi i(nx+my)}$ （n, m は整数）という形のものからなる。これらは実際に Δ の固有関数になっており、

$$\Delta e^{2\pi i(nx+my)} = 4\pi^2(n^2+m^2)e^{2\pi i(nx+my)}$$

と任意の n, m に対して計算できる。したがって固有値は

$$\lambda = 4\pi^2 \times (\text{平方数の和})$$

という形をしており、固有値分布は平方数の和の分布と同じになる。これは、トーラスという図形から平方数の和という一つの数列を得たことに他ならない。このようにして図形に対してそのラプラシアンの固有値列を考えるという問題は、数学でしばしば重要な問題となる。実際、次節で見るように $\mathbf{R}^2$ よりもっと複雑な空間を扱う場合、図形が肉眼では良く見えないことがあり、ラプラシアンの固有値列が図形を知るための手がかりとなることも多いのである。

3　双曲幾何

前節では大きな空間（普遍被覆空間）として普通の平面 $\mathbf{R}^2$ を考えたが、本節では複素上半平面を考える。前節で平面に作用する群 $\mathbf{Z}^2$ の基本領域を考えることによりトーラスという曲面を考えることができたように、本節でも複素上半平面に作用する群の基本領域を考えることにより、様々な曲面を考える。このような幾何学を双曲幾何という。$\mathbf{Z}^2$ に相当するものは、2×2 の行列の集合となる。例えば

$$SL(2, \mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ ad - bc = 1,\ a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$$

であり、上半平面の点 z に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

と作用する。これが前節の平行移動の代わりである。$SL(2, \mathbf{Z})$ は二つの行列 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ によって生成さ

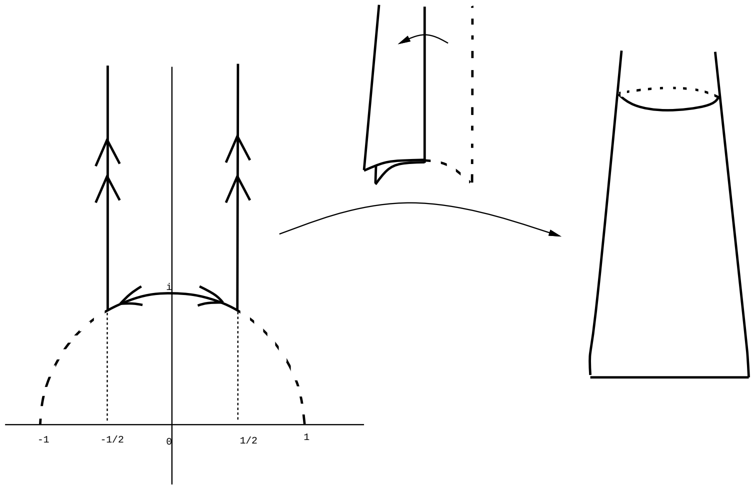

図 3: $SL(2,\mathbf{Z})$ の基本領域

れる。すなわち、$SL(2,\mathbf{Z})$ のどんな要素も、S と T のいくつかの積で書ける。作用の内容を見ると、T は横方向に 1 のずらし ($z\mapsto z+1$)、S はマイナス逆数（$z\mapsto -\frac{1}{z}$）を取るという移動である。$SL(2,\mathbf{Z})$ の基本領域（前節の単位正方形に当たるもの）は例えば図のように表せる。

この領域の横幅が 1 であることは、T が横に 1 ずらすことを物語っているし、単位円の外部（絶対値が 1 以上の領域）であることは、S が逆数を取る写像であることから来ている。境界は右半分と左半分が同一視されるので、曲面としては無限に細長く伸びた、底に二つの角がある袋のような形になる。このような曲面に対し、前節のようにラプラシアンの固有値と固有関数を求めたいわけである。上半平面に対するラプラシアンは、

$$\Delta = -y^2\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)$$

である。

この問題はトーラスの場合よりも格段に難しい。具体的に固有値・固有関数を求めることはほとんど不可能であるし、それど

ころか、固有値がいくつ存在するのかすら、なかなかわからないのである。そこで登場したのがセルバーグであった。

4 セルバーグの定理

セルバーグは、$SL(2,\mathbf{Z})$ だけでなく、その部分群

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z})\ :\ a\equiv d\equiv 1, b\equiv c\equiv 0\right\}$$

及び $SL(2,\mathbf{Z})$ と $\Gamma(N)$ の間にある群たちを一括して扱った。ただし、N は任意の自然数であり、$\equiv$ という記号は「N で割った余りが等しい」という意味である。これらの群は合同部分群と呼ばれる。また、それらの基本領域を合同型曲面と呼ぶ。

セルバーグの定理　合同型曲面の場合、ラプラシアンの固有値は無限個存在する。更に、x 以下の固有値の個数を $N(x)$ とおくと、$N(x)\sim cx$ が成り立つ。

ここで $\sim$ という記号は、左辺を右辺で割った分数の $x\to\infty$ での極限値が 1 に等しいという意味である。(c は正の定数である。) したがって、固有値は x にほぼ比例して存在することになる。これは無限個存在することのより精密な記述になっている。

さて、セルバーグの定理にある合同型曲面とは、全体の中でどれくらいの割合を占めるのであろうか。前節では平行移動の全体として $\mathbf{R}^2$ を考えたが、上半平面の場合にそれに当たるものは実数成分の行列群

$$SL(2,\mathbf{R})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ :\ ad-bc=1,\ a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$$

である。$SL(2,\mathbf{R})$ は、$SL(2,\mathbf{Z})$ 以外にも多くの部分群を持つ。そして、部分群をいろいろ変えてみると、基本領域の形や様子が全く異なるものがたくさん出てくるのである。ここが双曲幾

何の面白いところであり、合同型曲面は曲面全体のうちごく少数しかない。

窓から見える数学的風景は、縦軸が曲面の集合であり、横軸が実数の集合である。一つの曲面に対してラプラシアンの固有値分布がわかったということは、その高さの景色が見えたということである。セルバーグは、ブラインドの羽を一枚だけ取り去り、隙間から見える一筋の風景の中に固有値の無限列を発見したのである。そして、すべての合同型の部分について同じ事を行い、どの隙間からも固有値の無限列が見えたのであった。このような状況にあってセルバーグが以下の予想を立てたのはごく自然なことであったろう。

セルバーグ予想　基本領域の面積が有限であれば、ラプラシアンの固有値は無限個存在するだろう。更に x 以下の固有値の個数を $N(x)$ とおくと、$N(x) \sim cx$ が成り立つだろう。

当時、この予想を疑う者は誰一人いなかったに違いない。ブラインドの隙間からかいま見えたどのラインにも、固有値が無限個並んでいたのである。他の見えていないラインにも同様の風景が広がっているのを、誰もが想像しただろう。ところが、証明の糸口すら全くつかめぬまま、長い時が流れた。

5　サルナック予想

３０年後、サルナックの出現により、この問題は思わぬ方向に進展した。サルナックはフィリップスとの共同研究の中から、セルバーグ予想が誤りであることを確信したのである。

サルナック予想　基本領域が非コンパクトで面積が有限であれば、ほとんどすべての場合にラプラシアンの固有値は有限個しかないだろう。セルバーグ予想が成り立つのは、合同型などの数論的な場合に限るだろう。

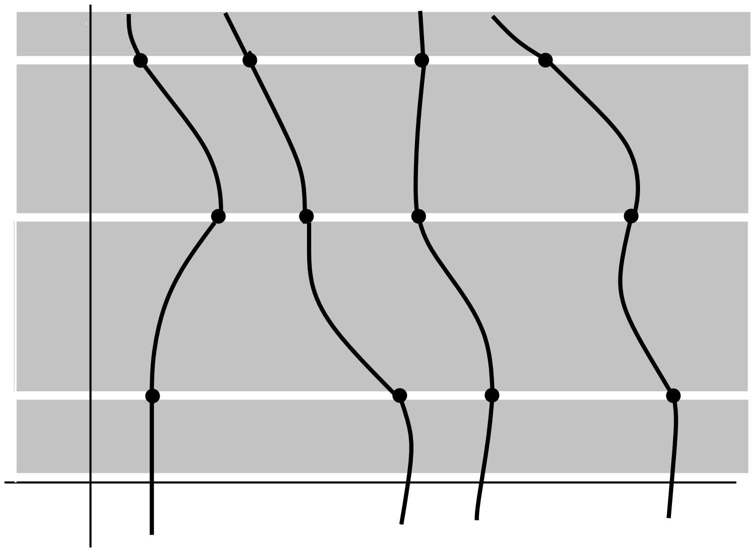

図 4: セルバーグ予想（縦軸が曲面の集合、横軸が実数の集合、黒丸が合同型の固有値、実線が予想）

予想の中で用いた用語を説明しよう。

1. 「非コンパクト」とは、曲面の中に無限に伸びている部分があるという意味であり、例えば図 3 の基本領域は y 軸の上の方に無限に伸びているから非コンパクトである。コンパクトな場合は常に固有値が無限個存在することが以前から知られていたので、非コンパクトの場合が問題なのである。

2. ここでいう「面積」は上半平面に特有の測り方による。y 軸の遠方部分の面積を小さく算入するため、例えば図 3 の領域の面積は$\pi/3$ と有限の値になる。

3. 「ほとんどすべて」の正確な意味は、タイヒミュラー空間の中でそれが成り立たない曲面の集合が低次元になることである。

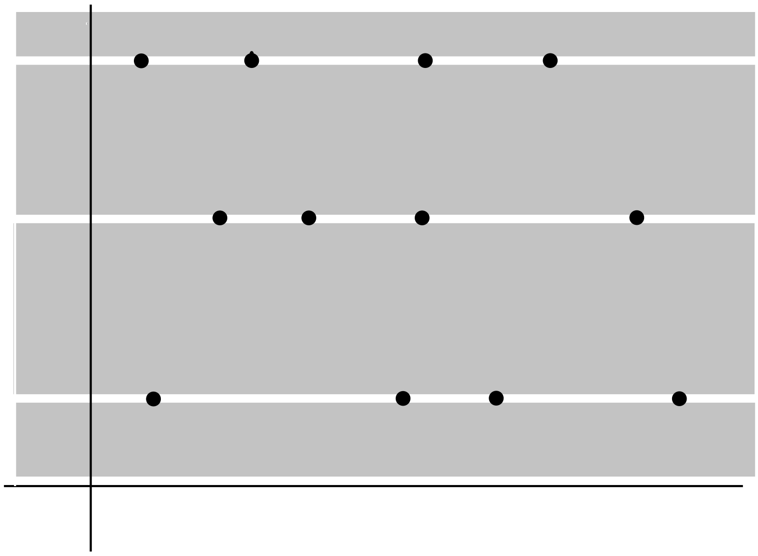

図 5: サルナック予想（固有値が孤立している）

4. 「数論的」の定義は省略するが、曲面全体の中では非常に珍しい例外的なものであり、合同型は数論的な曲面の典型である。

この予想によれば、セルバーグの見た景色は例外的な一部分であったことになり、ブラインドを全開にした景色の中に固有値列はほとんど見当たらない（数論的なところに例外として散在するのみ）ということになる。サルナック予想はセルバーグ予想と真っ向から対立するものである。では、サルナックはどのようにしてこの予想に至ったのだろうか。

サルナックがフィリップスとの共同研究で用いたアイディアは「曲面を連続的に少しだけ変形させる」という手法を用いることであった。これは、群を連続的に少しだけ動かすことによって実現される。例えば、トーラスの連続的な変形は、群 $\mathbf{Z}^2$ を

$$\{x(1,0)+y(0,1) \mid x, yinZ\}$$

と表した時の基底 $(1,0)$ や $(0,1)$ を少しだけ動かすことで得られる。また、$SL(2,\mathbf{Z})$ を連続的に少しだけ動かすとは、行列の各成分が整数であるという条件を少し変えて、整数に非常に近い実数（例えば、整数との差が１０万分の１未満であるような実数）を成分とする行列のなす群を考えるということである。（正しくは、曲面の集合であるタイヒミュラー空間内で「連続的に動かすこと」が正確に定義される。）更に、連続的に動かすときの動かし方を滑らかにした「解析的に動かす」という概念がある。彼らは、曲面を解析的に少しだけ動かした時に固有値の様子がどのように変わるかに注目したのである。

サルナックのもう一つの重要な発想は、固有値のみを考えず、スペクトルの全体を考えた点である。スペクトルとは、固有値と連続スペクトルの全体である。連続スペクトルとは、固有値と同じ式を満たすものでありながら、固有関数が必要な条件（２乗可積分性）を満たさないために固有値と認められないものである。非コンパクトの場合には連続スペクトルが存在することは知られていたが、固有値と連続スペクトルを合わせたスペクトル全体を扱おうという発想はサルナックによってもたらされたものである。彼は、フィリップスとの共同研究において、次の定理を証明した。

定理 **1** 曲面が解析的に動く時、スペクトル全体の集合も（所定の方法により複素平面内に図示して考えると）解析的に動く。

スペクトルを複素平面内に図示する方法は省略するが、すべてのスペクトルは実部が 0 と 1/2 の間の帯状領域内の点として表され、そのうち右の境界線上（実部が 1/2 の線上）にある点が固有値であり、それ以外の点が連続スペクトルとなる。今、ある曲面に対する固有値が、実部 1/2 の複素数 ρ で表されていたとする。その曲面をパラメータ $t \in \mathbf{R}$ を用いて解析的に動かしたとき、定理 1 によって解析的に動いた複素数を $\rho(t)$ とおき、$t = 0$

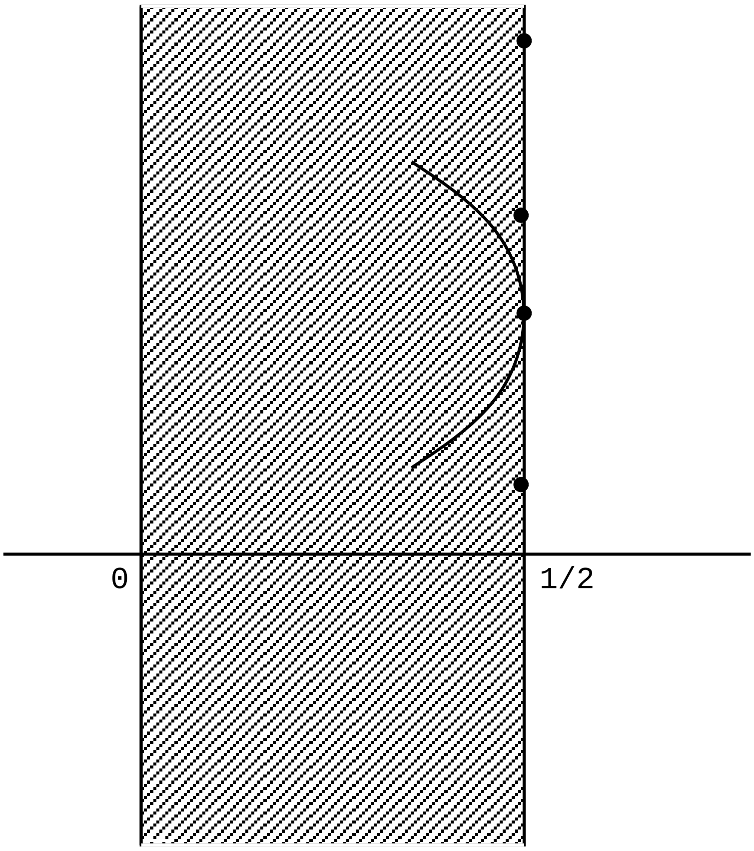

図 6: スペクトルの図

の時が元の点$\rho(0)=\rho$ であるとしよう。

サルナックらは $\Gamma_0(N)$ という合同型の場合に、次の定理を証明した。

定理 2 ρ の固有空間が 1 次元であり、ϕ がその固有関数であるとする。ある正の定数 c に対して次の式が成り立つ。

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Re}(\rho(t))\right|_{t=0} = -c\left|L\left(\rho, Q\otimes\phi\right)\right|^2$$

ただし、Q は重さ 4 の正則保型形式であり、$L(s, Q\otimes\phi)$ はランキン・セルバーグの L 関数である。

サルナックはこの定理より、セルバーグ予想が誤りであることを確信した。その理由は以下の通りである。もし合同型で見られた固有値分布の様子が、他の場合にも変わらないとするならば、複素平面内に図示された固有値は、実部が 1/2 の線上にとどまり続けなくてはならない。すると、曲面を解析的に動かした時、複素数の実部は 1/2 のまま一定となるから、定理 2 の左辺は 0 になるはずである。一方、右辺の L 関数の零点の位置は未解決であるが、零点は可算個しかないことがわかっており、点 ρ がたまたま零点になる可能性は非常に低いだろう。したがって、曲面を解析的に変形した場合、固有値が固有値であり続けることはできないであろう。——以上の議論を「固有値の消失理論」と呼ぶ。

6　証明への進展

固有値の消失理論を実際に展開してサルナック予想を証明するには少なくとも二つの困難がある。

困難 1 重複度仮説 ——すべての固有値は本質的に単根であると予想されている。これは定理 2 で仮定されており、重複度仮説と呼ばれる。この仮説は証明の糸口すらつかめない未解決問題である。これが証明できないと、固有値が単根でないことが有り得る。その場合一つの ρ に対して ϕ が複数個存在し、定理 2 の右辺が複数の L 関数の一次結合となる。すると、定理 2 の左辺が 0 であっても L 関数の値が 0 とは限らなくなり、消失理論が展開できない。

困難 2 $L(s, Q \otimes \phi)$ の零点決定問題 —— $s = \rho$ が実際に零点でないことを証明するのは困難である。ρ は実部が *1/2* であるから、仮に保型 L 関数に対するリーマン予想が示されてもこの問

題は解決しない。その意味で、消失理論はリーマン予想の先にある問題なのかも知れない。

サルナック予想の証明はどの程度進んでいるのだろうか。これまで、サルナックや周辺の研究者たちによって、証明への試みがいろいろなされている。例えば、サルナックとフィリップスはある合同型に指標を付け、指標を実数でパラメタライズした上で、セルバーグ予想を満たすような指標が高々可算個しかないことを証明した。ただし、困難1は回避できず、重複度仮説を仮定した上での結果である。以下の定理も、重複度仮説を仮定して得られるものである。(ここでは定理を簡略化して記す。より正確な記述はジャッジの原論文1を参照されたい。)

ジャッジの定理　ヘッケの三角群 $T(m)$ $(m > 2)$ のうちで、ラプラシアンの固有値を無限個持つものは、高々可算個しか存在しない。

ヘッケの三角群 $T(m)$ とは、二つの行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2\cos\frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ によって生成される、$SL(2,\mathbf{R})$ の部分群である。$m > 2$ に対して $T(m)$ の基本領域を考えることができ、$m = 3$ の時は前述の $SL(2,\mathbf{Z})$ と一致する。$T(m)$ が数論的であるのは $m = 3, 4, 6$ の時だけであり、それ以外の場合は非数論的であることが知られている。ジャッジの定理で扱われている $T(m)$ は、実数 m で曲面をパラメタライズしているため、曲面を一列に並べているイメージであり、窓枠に沿って縦に並べた状態はちょうど冒頭のブラインドの比喩に一致する。

セルバーグ予想における固有値とは、曲面全体に脈々とつながるものとみなされていたが、消失理論を踏まえると固有値はそこにのみ存在する点であり、ブラインドの羽を少しでも上下にずらすと見えなくなってしまうものなのである。サルナックは

固有値を「fragile and special」と形容している。fragile とは骨董品などの貴重品を運送するときに荷物に貼られる札の文句であり、壊れやすいもの、はかないもの、消えてしまいやすいもののことである。

セルバーグ予想のこれまでの経緯は、セルバーグのような天才的数学者の予想が誤りらしいということだけでも珍しく、素人でも興味を掻き立てられるものであったが、その否定的解決に向けて理論が進展してきた中で、この予想が数論、幾何学、タイヒミュラー空間論、散乱理論など、多くの分野に与えてきた影響の大きさは計り知れない。

セルバーグの発見は、古くはヒルベルトの時代から意識されていた数論（ゼータの零点）とスペクトルの関係を、初めて具体化したという点で画期的であった。サルナックの仕事は、セルバーグ予想を否定した側面ばかりが強調されかねないが、セルバーグ理論が数論的な場合に特有の現象であることを見抜いた点において、数論とスペクトルの関係をより確実なものに高めたともいえる。数論とスペクトルーーそこには、まだ私たちが見たことのない深い関わりが隠されているのかも知れない。

え／中筋 麻貴 （慶應大）
makirin@math.keio.ac.jp