ゼータ関数と量子カオス

小 山　信 也

1. 二つの宇宙

私たちの生きるこの宇宙のしくみを解き明かすのが物理学の目標であるならば，数たちが棲息するもう一つの宇宙のしくみを解き明かすことが数論の目標であろう．そのもう一つの宇宙は数学者が勝手に想像（創造）したものであると言う人もいるが，どこかに「存在している」と信じる人もいる．この議論は文献 6) に譲るとし，ここではこれら二つの宇宙のしくみに関する共通点を考えてみたい．

まず，この宇宙のしくみが解き明かされてきた過程を振り返ってみよう．１９世紀までに完成されたニュートン力学やマクスウェルの電磁気学などは，今では古典物理学と呼ばれ，高校の授業でも扱われている．そこで使われる概念は，私たちが普段使う日常言語またはそれを精密にしたものであり，私たちの日常的な経験でつちかわれた感覚で把握できるものに限られていた．古典物理学はマクロな現象を扱う限りにおいては近似的に正しいが，ミクロな世界を扱うことはできなかった．ミクロな現象は２０世紀に量子力学によって初めて説明できるようになった．そこでは，ミクロな物質は粒子であると同時に波動でもあると考える．物理量は自己共役作用素のことであると定式化され，その固有値や固有関数が宇宙を記述しているのである．

では，数たちの棲息する宇宙ではどうだろうか．そこでの研究対象は素数である．それは，文献 1) でも指摘されているように，自然数を分けていくと素数になることが，物質を分けていくと素粒子になることの類似とみなせることからもわかる．素数の分布は，１９世紀までに大まかに求められた．それは素数定理と呼ばれており，後述のように，素数分布の初項のみを求めたものである．それは，古典物理学が近似的な意味で正しいことに対応していると解釈できる．また，素数定理の証明においては，ゼータ関数の収束域の境界である実部１のラインでのゼータ関数の性質が用いられるが，収束域とは数学者の感覚では「目に見える範囲」であり，これも古典物理学が日常で目にできる範囲の事物を扱っていたことに類似していると捉えられる．

素数定理を精密化する問題は未解決であり，完全な解決は「リーマン予想」という現代数学最大の未解決問題と同値である．研究対象はゼータ関数の零点であり，特に収束域（$\mathrm{Re}(s) > 1$）とそれを関数等式で移した領域（$\mathrm{Re}(s) < 0$）に属さない「目に見えない範囲」（$0 < \mathrm{Re}(s) < 1$）にあるものである．近年，これらの零点を作用素のスペクトルと関連づけて解釈することによりその位置や分布を求めようとする動きが活発になってきた．こうした動きを総称して「数論的量子カオス」と呼ぶ.（数論的量子カオスの重要性と諸結果の概観は文献 5) と 10) に詳しい.）

この研究は，素数定理の「精密化」という観点からも，ゼータ関数の「目に見えない範囲」を扱う点からも，また，作用素のスペクトルに結び付けて解釈するという観点からも，数の宇宙の量子力学とみなすことができる．以上の類

表 1　二つの宇宙

私たちの宇宙	数たちの宇宙
古典物理学（マクロ）	素数定理の主要項
量子力学（ミクロ）	素数定理の精密化
日常的世界	$\mathrm{Re}(s) > 1$，$\mathrm{Re}(s) < 0$
量子的世界	$0 < \mathrm{Re}(s) < 1$
統一理論	リーマン予想
物質	数（ゼータ関数）
素粒子	素数（A 型ゼータ関数）
波動的性質	スペクトル的解釈（S 型ゼータ関数）

似をまとめたものが表 1 である.（表中，統一理論とリーマン予想の対応については文献 1) を，A 型及び S 型ゼータ関数に関しては文献 2) を御参照下さい.）

本稿では，素数定理の初項，第二項，という概念を詳しく解説し，それらとゼータ関数との関わりを見る．続いて，ゼータ関数の非自明零点の分布をランダム行列理論で記述するという最先端の研究の一端を紹介する．これによって，数論的量子カオスが数の世界の量子力学であるという位置づけがご理解頂けるものと思う．

それが「物理学寄りの読者のための入門的解説を」という編集者の要請に答えることになると考えるのである．

2. リーマン・ゼータ関数

リーマン・ゼータ関数とは

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

という関数である．s が実数なら，$\zeta(s)$ は $s > 1$ のとき収束し，$s \leq 1$ のとき発散する．s が複素数の時，一般に $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$ であるから，s の実部 $\mathrm{Re}(s)$ の値で収束性は決まる．$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき絶対収束し，$\mathrm{Re}(s) \leq 1$ の時発散する．このリーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ は，数論のすべてを知っていると言われている．例えば，収束・発散の境界である $s = 1$ において $\zeta(s)$ が発散すること（$\zeta(1) = \infty$）は，素数が無限個あることと同値である．素数が無限個あること自体は素朴な考え*1) によって直接証明できるが，$\zeta(1) = \infty$ はこの事実の別証明*2) を与えるのである．それは，以下のように級数を「まるごと素因数分解」することによる．

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \cdots\right)\\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \cdots\right)\\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \frac{1}{5^{3s}} + \cdots\right)\\ &\quad \times \cdots\\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right)\\ &= \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで最後の二行に現れる $\prod_p$ という記号は，すべての素数に渡る積を意味する．もし素数が有限個しかないとすれば，これは有限積となり，$\zeta(1) = \infty$ に矛盾する．これによって素数が無限個あることがわかる．

さて，ゼータ関数は（1）（2）のような二種類の表示を持つ.（1）は整数に渡る無限和であり「ディリクレ級数」と呼ばれる.（2）は素数に渡る無限積であり「オイラー積」と呼ばれる．一見ディリクレ級数の方が親しみやすいかも知れないが，実はオイラー積の方がより本質的な定義であることが知られている．

ところで，素数が無限個あることをゼータ関数のオイラー積を用いて証明するこの手法には，素朴な方法にはない二つの利点がある．第一の利点は，リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の形を少し変えて変形版のゼータ関数（L-関数と呼ばれる）を作り，上記の考えをより進めることにより「特定の性質を持った素数が無限個存在すること」が証明できることである．例えば,「５で割って２余る素数は無限個存在すること」や，

*1)　有限個の素数 $p_1, \ldots, p_n$ からそれらのどれでも割り切れない数 $p_1 \times \cdots \times p_n + 1$ が構成できることを用いる方法．ユークリッドによる．

*2)　オイラー（１７３７）による．

より一般に「m で割って a 余る素数が無限個存在すること[*3)]」（m と a は公約数を持たない自然数）が証明できる[*4)]のである．

第二の利点は，リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の性質を，$\zeta(1)=\infty$ だけでなく，複素関数としてより詳しく調べることにより，素数が単に無限個あるというだけでなく，「どれくらいの大きさの無限個か」という量的な評価が求められるということである．それは，有名な「素数定理」により以下のように記述される．（オイラーの結果から素数定理を導く考え方は，例えば文献 3) に詳しい．）

素数定理　x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ は，次を満たす．

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \tag{3}$$

$$\sim \frac{x}{\log x} \tag{4}$$

ただし，記号 “$\sim$” は

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{5}$$

で定義される．

（３）は部分積分により

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{1!x}{(\log x)^2} + \cdots + \frac{(m-1)!x}{(\log x)^m} + \cdots \tag{6}$$

となることから，（４）は（３）を展開した時の初項にあたるものである．（６）は，$\log x$ のベキによる展開であるが，$\log x$ は $x\to\infty$ の時，x の任意のベキに比べて無視できるほど十分小さい[*5)]ため，（３）（４）（６）に現れるすべての項は，x のベキとしては１乗に最も近いことがわかる．このように，$\log x$ のような十分小さい部分を無視して項の大きさを x のベキだけで近似的に表し「ほぼ x の１乗に等しい」と表現することにする．

（３）と（４）を見比べると，一見したところ，（４）の方がわかりやすくて良い表示であるかのように見える．しかし，実際は（３）の方が素数の様子をより良く表しているのである．そのことを理解するため，多少直感的に「自然数 x が素数である “確率”」を思い浮かべてみよう．直感的には，x が大きくなれば，素数である確率は減りそうである．（４）の意味するところは「１から x までの x 個の整数が，平均確率 $\frac{1}{\log x}$ で素数である」ということである．しかし，より詳しく見れば１から x までの x 個の整数の中でも，大きいものは素数でありにくく，小さいものは素数でありやすいだろう．したがって，これら x 個の数に一様に確率 $\frac{1}{\log x}$ を適用して単に x 倍するよりも，その中の数 t に対してそれぞれ 確率 $\frac{1}{\log t}$ を適用して積分する方がより真実に近いということができる．（３）にはそのような意味が込められている．そして実際に素数の個数を測定すると（３）の方が（４）よりも真実の値に近いことがわかる．実は，$\pi(x)$ のうちで「ほぼ x の１乗である部分」は（３）ですべて尽くされているのである．

このように，記号 “$\sim$” は「∞における挙動がほぼ等しい」というニュアンスであるが，これは「非常に大雑把な等しさ」しか表していない．例えば，$f(x)=x^3$ に対し，$g(x)$ として x^3 で始まる多項式 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を取れば，どんな a,b,c に対しても $f(x)\sim g(x)$ が成り立つ．その意味で，素数定理は「$\pi(x)$ の初項だけを求めた定理」であると言える．ここでいう「初項」とは，上記の理由により，（４）ではなく（３）を指し，「ほぼ x の１乗」のことである．

自然な要求として「$\pi(x)$ の第二項を求めたい」という問題が起きる．第二項は１より小さな数 e を用いて「ほぼ x の e 乗」（に何か係数がついたもの）と表されるはずである．e を求める問題は未解決であるが，リーマン・ゼータ

*3)　この事実は通称「算術級数定理」と呼ばれる．算術級数とは現在の用語では等差数列のことであり，$mk+a\ (k=1,2,3,\ldots)$ という等差数列中に素数が無限個存在することからこの名前がついた．

*4)　例えば文献 7) 第６章

*5)　例えば文献 4)§3.4.2

関数 $\zeta(s)$ との関係は次のことがわかっている．

定理 e は 複素関数としての $\zeta(s)$ の零点の実部の上限（最大値）に等しい．(すなわち，$\zeta(s)$ が０にならない範囲を実部が１の線から左に広げて行った時の限界が e である．)

$\zeta(s)$ の定義式は実部が１より大きい領域でしか収束しないが，全複素平面に有理型接続されることは良く知られている．$\zeta(s)$ の極は $s=1$ のみであり，他では正則となる．$\zeta(s)$ の零点は，負の偶数に「自明な零点」と呼ばれるものがあり，それ以外の零点は「非自明な零点」と呼ばれ，実部が０と１の間の縦長帯状領域内にあることがわかっている．上の定理と関係するのはこの非自明零点である．これまでに発見された非自明零点は，すべて実部が $\frac{1}{2}$ である．リーマンは１８５９年，すべての非自明零点は実部が $\frac{1}{2}$ であることが極めて確からしいと言明した．これは「リーマン予想」と呼ばれる．リーマンがこれを証明したかどうかは不明であるが，その遺稿から，彼はその時点で少なくとも１９３０年頃の最先端のレベル*6) に達していたことが調査によって明らかにされた．

もしリーマン予想が真実なら，上の定理から $e=\frac{1}{2}$ となり，素数定理の第二項が求められる．これまでのところ，すべての非自明な零点のうち少なくとも $\frac{2}{5}$ 以上は実部が $\frac{1}{2}$ であること*7) が証明されているが，零点が存在しない範囲を実部１より少しでも左に広げることには誰も成功していない．(勿論，１より左に広げられないことの証明にも誰も成功していない．)

3. 量子カオス

リーマン予想が難しいのは，それが定義式の収束域外における問題だからである．定義式は実部が１より大きい範囲でしか収束せず，実部１のラインを越えた瞬間，ゼータ関数の振舞いは私たちの目に見えなくなってしまうのである．しかし，このように目に見えない範囲で起きているゼータ関数の振舞いこそが，数の世界の原理を記述しており，それこそが数論の求めるものなのである．

実部１のラインを越えた先にはどんな風景が広がっているのであろうか．リーマン以降，伝統的になされてきた研究の関心は，非自明零点がどこにどれくらいたくさんあるか，という方向に向けられてきた．それは，虚部が T 以下の範囲にある非自明零点の個数（$N(T)$ と書く）及びそのうち実部が $\frac{1}{2}$ であるものの個数（$N_0(T)$ と書く）の $T\to\infty$ の際の漸近挙動*8) を求め，また，$N(T)$ と $N_0(T)$ の関係*9) を導くというものであった．

１９００年に提出された有名な「ヒルベルトの問題」でもゼータ関数は取り上げられている．第八問題「素数の問題」でヒルベルトは素数分布に関する未解決問題を解くにはリーマン予想の証明が重要であることを指摘している．さらに，１９１５年頃，ヒルベルトとポリャはゼータ関数の非自明零点をスペクトルとして解釈できないか，と提案した．これは，ゼータの零点の量的な研究とは対照的に，零点に何らかの隠された意味を見い出そうとするいわば質的な研究への最初の提案であった．

ゼータ関数の非自明零点とスペクトルは，１９５６年，セルバーグ・ゼータ関数の発見で初めて実際に関係づけられた．セルバーグはラプラシアンのスペクトルを非自明零点として持つようなゼータ関数の族を発見し，それらのゼータ関数がリーマン予想をほぼ満たすことを示したのである．これまでのところ，その族にリーマン・ゼータ関数は属していないとはいえ，これによって，非自明零点のスペクトル的解釈が

*6) 「実部が $\frac{1}{2}$ である無限個の零点が存在する」というハーディの定理（１９１４）や，ハーディ・リトルウッドによる近似関数等式（１９２０頃），ティッチマーシュによる零点の数値計算（１９３０頃）など．

*7) コンリー（１９８９）による．

*8) 例えば $N(T)\sim\frac{T}{2\pi}\log T$ 及び $N_0(T)>cT$ などの事実がリーマンによって見い出されていた．彼の遺稿調査前は，ハーディ（１９１４）によるとされていた．(脚注６)

*9) 脚注７のコンリーの定理は $N_0(T)>\frac{2}{5}N(T)$ と表される．リーマン予想は「すべての $T>0$ に対して $N(T)=N_0(T)$ が成り立つ」と言い換えられる．

リーマン予想の解決につながるだろうというヒルベルト・ポリャの提案は現実味を帯びてきたと言える．セルバーグ・ゼータ関数に関しては文献 5) に詳しく述べたのでここでは省略する．

ゼータ関数の零点をスペクトルとして解釈しようというヒルベルト・ポリャの提案を発展させたもう一つの研究は，モンゴメリやオドリズコらによる数値計算が契機となって見い出された，ランダム行列理論との関連である．以下，本稿ではこの方向に関する最近の進展を報告する．

それは，非自明零点の実部から虚部へ目を転じ，まず虚部の分布を詳しく見てみようという発想から始まる．虚部の分布に関しては $N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log T$ （脚注８）が知られていたが，それは平均的な分布に過ぎない．実際の分布が平均とどの程度隔たりがあるのか（隣り合う零点の間隔はほぼ一定なのか，それとも激しいばらつきがあるのか）ということは，この式からは全くわからないのである．そこで，実際の分布を数値計算で求めたのが図１のグラフ（文献 8) による）のプロット（横軸 0.05 刻みでプロットされている）である．

図１は，虚部が連続する７００万個の非自明零点を，虚部が 10^{20} の付近から取り出し，それらの間隔を計算したものである．このグラフの横軸は隣り合う零点の間隔であり，縦軸は度数分布（確率）であるが，初めに虚軸のスケールを調節して $N(T) \sim T$ となるように正規化しているため，隣り合う零点の間隔は平均１となっている．また，度数分布は全体が１となるように正規化されている．プロットされている点たちを結んでいるかのように見える実線は，実はそうではなく，全く別の理論から出てきた曲線である．これは，ランダム行列の隣り合う固有値の間隔の分布を，行列の次数を無限大に飛ばして考えた理論曲線なのである．これは誰が見ても驚くべき一致であり，とても偶然とは思えないであろう．

このようにして，ゼータ関数の零点の虚部の分布がランダム行列の固有値間隔と一致するだろうという予想が得られる．これはモンゴメリ・オドリズコの予想と呼ばれており，図１は数論研究者にとって衝撃的な実験結果であった．しかし，実際にこれを証明することは非常に難しいと考えられていた．近年，数論的量子カオスの進展の流れの中で，ルドニックとサルナックがこの予想を “部分的に” 証明した．これは，ゼータ関数とランダム行列理論の関係に初めて理論的根拠を与えた画期的な業績であるが，彼らの論文 9) は難解である．そこで，以下では彼らの主定理の意味を解説しながら「部分的解決」の意味も説明して行きたい．以下の説明では，簡単のためリーマン予想を仮定する．すると，非自明零点$\rho = \frac{1}{2} + \gamma$ の分布を求めるにはその虚部 γ にだけ注目すれば良い．（彼らの定理はリーマン予想を仮定しておらず，以下の式（７）を実部も含めた非自明零点の集合とし，零点の差は実部も含めて取っている．）

まず，虚軸のスケールを調節し， $N(T) \sim T$ となるように正規化して考える．虚部が連続する N 個の零点を取り，その虚部の集合を

$$B_N = \{\gamma_1, ..., \gamma_N\} \tag{7}$$

とおく．（グラフの例では $N = 7000000$．）虚部のばらつきを知るには，閉区間 $[a, b]$ に対し，差 $\gamma_{k+1} - \gamma_k$ が $[a, b]$ に属するような k の個数 $N(a, b)$ が，任意の a, b に対してわかれば良い．

ところが，これは大変扱いにくい量である．それは，二つの零点が連続するかどうかを判定することが（すべての零点の顔ぶれを知らない限り）不可能であるからである．より扱いやすい量として，隣り合うとは限らない二零点の組で，虚部の差が $[a,b]$ に属するものの個数を考えて N_2 とおく．すなわち，

$$N_2(a,b) = \#\{(\gamma,\gamma')|\gamma<\gamma',\ \gamma'-\gamma\in[a,b]\}$$

である．同様に，隣り合うとは限らない零点の三つ組で，虚部が最大のものと最小のものとの差が $[a,b]$ に属するものの個数を考えて N_3 とおく．このようにして，隣り合うとは限らない n 個の零点の組で同様の条件を満たすものを N_n とおく．求める量 $N(a,b)$ と N_2 とのずれは，N_3 に数えられる三つ組によって起きることが容易にわかる．その分を補正して N_2-N_3 を考えると，それと $N(a,b)$ とのずれは N_4 に数えられる四つ組によって起きている．この考えを進めていくと，

$$N(a,b) = N_2 - N_3 + N_4 - N_5 + \cdots \quad (8)$$

となる．したがって，$N(a,b)$ を求めるには各 N_n を求めれば良いことがわかる．以下，N_n を求めることを目標にする．そこで，N_n を少し一般化して，n 階相関関係（n-level correlation）と呼ばれる次の量を定義する．

定義（n 階相関関係）

$$R^{(n)}(f,B_N) = \frac{1}{N}\sum f(\gamma_{j_1},...,\gamma_{j_n}) \quad (9)$$

右辺の和は，どの二つも異なるような N 以下の自然数 $j_1,...,j_n$ の組に渡る．n 変数関数 f は試験関数（test function）と呼ばれ，f をいろいろに与えることにより，（9）はいろいろな意味を持つ．例えば，f が与えられた n 個の数に対しその最大値と最小値の差が $[a,b]$ に属すれば 1，それ以外なら 0 を取るような関数である時，先ほどの N_n との間に

$$R^{(n)}(f,B_N) = \frac{n!}{N}N_n \quad (10)$$

という関係が成り立つことは直ちにわかる．したがって，一般の f に対して n 階相関関係 $R^{(n)}(f,B_N)$ を求めることで，目標は達せられる．

ここで「一般の f」と言ってもあまりにも曖昧である．そこで，n 階相関関係を考えるに当たっては，以下の三条件を f が満たしていることを前提とする．

(i) f は n 個の変数に関して対称である．

(ii) f の値は変数同士の差のみで決まる．（すなわち任意の実数 t に対し $f(x_1+t,...,x_n+t) = f(x_1,...,x_n)$）

(iii) f はベクトル $(x_1,...,x_n)$ が超平面 $x_1+\cdots+x_n=0$ 上で無限遠点に近付くとき，急減少する．

(iii) の急減少条件が不可欠であることは，（9）の収束性のためであるが，「超平面 $x_1+\cdots+x_n=0$ 上」だけ考えれば十分である理由は，(ii) で $t\to\infty$ の時には f が急減少する必要がないことから，基準として一つの超平面を固定してその上で考えれば良いからである．これら 3 つの条件は，相関関係としての意味を持たせるために前提とすべきであり，実際，先ほど述べた（10）を実現する f はこの三条件を満たしている．

私たちの目標は，上の三条件を満たすような任意の f に対して n 階相関関係 $R^{(n)}(f,B_N)$ とランダム行列との関係を求めることである．ルドニックとサルナックは，f に制限をつけた上で解決を得た．

定理　n 変数関数 f のフーリエ変換 $\hat{f}(\xi) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx$ の台（support）が $|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|<2$ に含まれるならば，n 階相関関係 $R^{(n)}(f,B_N)$ と次式（11）は，$N\to\infty$ における極限値が等しい．

$$\frac{1}{N}\int_0^N\cdots\int_0^N W^{(n)}(x)f(x_1,...,x_n)dx \quad (11)$$

ここで，$W^{(n)}(x)$ は，$\frac{\sin\pi(x_i-x_j)}{\pi(x_i-x_j)}$ を (i,j)-成分に持つような n 次正方行列の行列式である．

この $W^{(n)}(x)$ はランダム行列理論においてエルミート行列をランダムに取った GUE と呼ばれるモデルの固有値間隔の密度関数である．この定理はモンゴメリ・オドリズコ予想を初めて理

論的に裏付けたと言える．

4. 終わりに

本稿ではゼータ関数の非自明零点の間隔とランダム行列理論との関わりを詳しく見てきたが，もっと素朴に素数の集合や，二次形式に整数を代入した時に取る値の集合について，同様の方法で間隔のばらつき具合を調べることができる．実験によると，この二つの例はいずれもランダム数列の分布に等しくなるのである．（意外に思われるかも知れないが，このような素朴な場合でも証明は全くなされていない．文献 11) を参照.）素数の分布を支配すると考えられている非自明零点が，単なるランダム数列ではなく，ランダム行列の固有値分布に従うという発見は，古来から直感されてきた数論とランダム性の関係をより深いものにしたといえる．今後，数の世界の神秘を解き明かす上で，ランダム性が一つのキーワードになっていくことは間違いないであろう．

参考文献

1) 黒川信重 :「素粒子と素数」，数理科学 １１月号 (1986) 64-69.
2) 黒川信重 :「オイラー積の２５０年（下)」，数学セミナー １０月号 (1988) 67-74.
3) 黒川信重 :「リーマン・ゼータ関数」，数理科学 ９月号 (1996) 5-11.
4) M. ケッヒャー（長岡昇勇・訳）:「数論的古典解析」，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1996)
5) 小山信也 :「散乱行列式と数論的量子カオス」，数理科学 ４月号 (1995) 46-53
6) J.P. シャンジュー，A. コンヌ（浜名優美・訳）:「考える物質」，産業図書 (1991)
7) J.P. セール（弥永健一・訳）:「数論講義」，岩波書店 (1979)
8) A. Odlyzko : “On the distribution of spacings between zeros of zeta functions”，Math. of Comp. 48 (1987) 273-308
9) Z. Rudnick and P. Sarnak : “Principal L-functions and random matrix theory”，Duke Math J. 81, (1996) 269-322
10) P. Sarnak : “Arithmetic Quantum Chaos”，Israel Math Conference Proc. 8 (1995) 183-236
11) P. Sarnak : “Values at integers of binary quadratic forms”，C. Herz Memorial Volume (to appear)

（こやま・しんや，慶應大学）