「数理科学」４月号（１９９５）

散乱行列式と数論的量子カオス

慶應大 理工　　小山 信也

私達が生きているこの世界のしくみを解き明かそうとして、人々は物理学を発展させてきた。今世紀に入り、量子力学の到達した一つの知恵は、この世界は、作用素とその固有関数によって記述され、支配されていると言う原理であった。

一方、数たちが生息している「あの世界」の神秘を解き明かそうとして、人々は数論を発展させてきた。そして、あの世界にもまた、この世界と同様の原理が存在するのではなかろうか、すなわち、ある種の作用素とそのスペクトルを研究することで、数論の神秘は解き明かされるのではなかろうか ------- そんな哲学を抱いて、数論の新しい分野が誕生した。それは「数論的量子カオス」と呼ばれる。

「数論的量子 カオス 」は、米国プリンストン 大学のピーター ・サルナック （Peter Sarnak）教授[S2]により、２年半ほど前から提唱されてきた、数論の新しい分野である。筆者は、過去二年間に渡り、プリンストン大学に研究員として滞在しながら、サルナック教授の下でその研究に従事してきた。数論的量子カオスの研究目的を端的に述べるならば、「数論的群Γを基本群に持つようなリーマン多様体M上のラプラシアンΔのスペクトルλ及びその固有関数ϕ_λの様子を、特に$\lambda\to\infty$のときに知ること」であると言える。本稿では、そうした研究がなぜ数論にとって重要なのか、その理由を二つの側面から解説し、散乱行列式との関係を見る。そして後半部では、最先端でどのような進展が得られているのかを報告する。

ゼータ統一理論の立場から

ゼータ統一理論とは、リーマン・ゼータのようなＡ型のゼータ関数を、Ｓ型のゼータ関数として 表すことにより 、リーマン 予想 を解決 しようと 言う哲学（予想）である 。[I,Ku2]リーマン・ゼータとは

$$\zeta(s)=\prod_p (1-p^{-s})^{-1} \qquad (\mathrm{Re}(s)>1)$$

という関数で、$p=2,3,5,7,11,13,...$ は素数の全体に渡る。「リーマン・ゼータは数論のすべてを知っている」とは良く言われることであって、例えば、$\zeta(s)$が$s=1$で極を持つ（$\zeta(1)=\infty$）という事実は、素数が無限個存在することを表している。この考え方を進

めて得られる素数定理

$$（x\text{以下の素数の個数}）\sim\frac{x}{\log x}\quad(x\to\infty)$$

は、$\zeta(s)$ を複素関数として扱うことにより証明される。そして、これを更に精密化し、素数の個数のより良い評価を得ようとする際、$\zeta(s)$ の虚零点が素数分布を本質的に記述することがわかる。その虚零点を求める問題は、未解決であるが、「すべての虚零点は実部が 1/2 であろう」というリーマン予想（１８５９年）は、１３０年以上経た今もまだ証明されていない。リーマン予想は、それが正しければ素数定理の究極的な評価を与えることなどから、非常に重要である（例えば黒川[Ku3]§３）。

一方、Ｓ型ゼータというのは、Ａ型との類似から、可算群 Γ に対し、

$$\zeta_\Gamma(s)=\prod_p(1-N(p)^{-s})^{-1}$$

という形をしているものと考えられている。ここで p は、Γ の素な共役類の全体を渡り、N（p）は p のノルムと呼ばれる実数値であるが、その定義は、すべての Γ に対して必ずしもはっきり知られている訳ではない。良く知られている例として、例えば、Γ が

$$SL(2,\mathbf{R})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in\mathbf{R},ad-bc=1\right\}$$

の良い離散部分群の場合、行列 p のノルムを、その固有値の絶対値の２乗のうち１以上のものと定義すると、$\zeta_\Gamma(s)$ が $\mathrm{Re}(s)>1$ で収束し、リーマン・ゼータと同様に s の複素関数として有理型接続を持つことがわかる[Se2]。Ｓ型ゼータが重要である理由は、これが対応するラプラシアンの行列式を用いて表され、そこからＳ型ゼータの虚零点の実部（リーマン予想）が比較的容易に求められることである。ここで「対応するラプラシアン」と言ったのは、次のような意味である。例えば、上記の Γ を基本群とするような多様体は、負定曲率のリーマン面 M である。その普遍被覆空間である複素上半平面 $H=\{x+iy|y>0\}$ の上のラプラシアン

$$\Delta=-y^2\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)$$

を Γ に対応するラプラシアンと考える。M がコンパクトな時、ラプラシアンは離散スペクトルしか持たず、ゼータ正規化の方法で行列式 $\det(\Delta)$ が定義される[Ku4]。驚くべきことは、固有値を $-s(1-s)$ だけずらして考えた $\det(\Delta-s(1-s))$ のような行列式を考えると、そのいくつかのタイプの積または商に $\zeta_\Gamma(s)$ が等しくなると言うことである。正確にはガンマ因子がくっつく。今の例では

$$\zeta_\Gamma(s)=\frac{\det(\Delta+s(1+s))}{\det(\Delta-s(1-s))}\times（\text{ガンマ因子}）$$

となる。この事実はサルナック[S1]、ヴォロス[V]により発見され、その後、黒川[Ku1]、小山[K1,K2]、エフラット[E2]らにより拡張された。ガンマ因子は、ガンマ関数、多重ガンマ関数の他に、散乱行列式を含む。この拡張は、散乱行列式が具体的に知られている場

合にのみ可能であるが、これについては後節に述べる。

固有値をずらして得られた$\det(\Delta - s(1-s))$のような形の式は、なぜ重要なのだろうか？ それは、以下の計算によりゼータ関数の零点の実部が特定できるからである。

$$\det(\Delta - s(1-s)) = \prod_{\lambda}\left(\lambda - s(1-s)\right) = 0 \qquad (\lambda\text{は}\Delta\text{の固有値})$$

$$\Leftrightarrow \lambda - s(1-s) = 0 \quad \text{となる固有値 } \lambda \geq 0 \text{ が存在}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}\, i \quad \text{となる固有値 } \lambda \geq 0 \text{ が存在}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2} \text{ または } 0 \leq s \leq 1$$

従って、リーマン・ゼータをある群Γを用いて$\zeta(s) = \zeta_{\Gamma}(s)$と表すことができれば、それが対応するラプラシアンの行列式で表示され、（更にすべての固有値が 1/4 以上になれば）零点の実部が特定できて、リーマン予想が解決するだろう。これがゼータ統一理論の主張である。

さて、この主張は本当に正しいのだろうか？ それを判断することは難しい。なぜなら、Ｓ型ゼータの虚零点に関し、実部（リーマン予想）以外のことがほとんど何も知られていないからである。Ｓ型ゼータの零点の虚部、すなわちラプラシアンの固有値の分布や、ばらつきの具合は、本当にＡ型のそれと似ているのだろうか？ そういう疑問を持つのは当然であろう。ここから、「数論的量子カオス」の必要性が認識される。

カスプ形式の存在理論の立場から

前節では簡単のために、Mがコンパクトな場合を例に挙げたが、数論的なΓの多くは非コンパクトなMに対応する。その場合に特徴的なのは、Δが連続スペクトルを持つことである。連続スペクトルというのは、固有値が通常のように $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$と離散的に現れるのではなく、連続的に変化する変数$r$の関数$\lambda(r)$ として連続的に現れるものである。離散スペクトルに関しては、その分布が興味の対象となるが、連続スペクトルに関しては、素朴な意味での個数は連続無限個になってしまう。そこで導入されるのが散乱行列式φである。φはMの非コンパクト性が及ぼすスペクトルへの影響を、一つの関数として表したものであり、その零点や極から構成される点列を、あたかも離散スペクトル列のようにみなして扱うことができる、便利なものである。（φの正確な定義については次節で詳しく述べる。）例えば、大きさ $R^2 + \frac{1}{4}$ 以下の離散スペクトルの個数に対応して、

$$\frac{-1}{4\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi'}{\varphi}\left(\frac{1}{2} + ir\right) dr$$

という量が、その大きさの連続スペクトルの「個数」に当たる量であることが知られてい

る。スペクトルの分布については、セルバーグの先駆的な研究による次の定理が有名である。

セルバーグの定理１　リーマン面Mの体積 vol(M)が有限ならば、次の式が成り立つ。

$$\#\{\lambda < R^2 + \frac{1}{4} \mid \Delta\text{の固有値}\} + \frac{-1}{4\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi'}{\varphi}\left(\frac{1}{2}+ir\right) dr \sim \frac{\mathrm{vol}(M)}{4\pi} R^2 \qquad (R \to \infty)$$

　左辺の第一項は、大きさ $R^2 + \frac{1}{4}$ までの離散スペクトル（固有値）の個数である。第二項はその大きさの連続スペクトルの「個数に当たる量」である。左辺を全体として見ると、その大きさの離散、連続すべてのスペクトルの「個数」の合計になっている。この定理の主張は、すべてのスペクトルの「個数」の合計は、Rの２乗に比例するということである。離散、連続の内訳に関しては、合同部分群の場合に限り、セルバーグは次の定理を発見して解決した。

セルバーグの定理２　Γが合同部分群の時、次の式が成り立つ。

$$\#\{\lambda < R^2 + \frac{1}{4} \mid \Delta\text{の固有値}\} \sim \frac{\mathrm{vol}(M)}{4\pi} R^2 \qquad (R \to \infty)$$

　合同部分群は、数論的なΓとして最も典型的な物であり、最も良く研究されてきた対象である。この定理の意味するところは、合同部分群の時は離散スペクトルが全体の個数を尽くしてしまっており、定理１の左辺の主要項は第一項だということである。セルバーグは、定理２を踏まえて、次を予想した。

セルバーグの予想
リーマン面Mの体積が有限である限り、すべてのΓに対して定理２と同じ式が成り立つだろう。

　数論に保型関数論という分野がある。そこでは、離散スペクトルの固有関数を「Γのカスプ形式 (cusp form)」と呼び、連続スペクトルの固有関数を「Γのアイゼンシュタイン級数 (Eisenstein series)」と呼ぶ。アイゼンシュタイン級数は具体的な級数の形で定義されるのに対し、カスプ形式にはそうした表示がない。定理２のように、離散スペクトルが豊富に存在することが証明されている場合は、カスプ形式の豊富な存在も保証されているわけだけれども、実際にそれがどういう関数になっているかは、全貌を誰も見たことがない。（テータ級数で書けるカスプ形式は例外的にわかりやすい。）なぜアイゼンシュタイン級数のような統一的な定義を、カスプ形式に対して見つけることができないのか。そ

れは保型関数論における長年の謎であった。

１９８０年代後半、フィリップス、サルナック等の新しい研究[PS1,PS2]により、この問題は新局面を迎える。彼らは、Γ をタイヒミュラー空間の中で動かしながらスペクトルの挙動を見ることにより、Γ の変化に伴って離散スペクトルは連続的に変化するというよりは、むしろ突然消失してしまうような様相を呈することを発見した。そこで、サルナックは、セルバーグの予想を覆す、次の予想を提出した。

サルナックの予想
ほとんどすべての Γ に対し、$\#\{\lambda < R \mid \Delta \text{の固有値}\}$ は有界となるだろう。定理２の式が成立することは、Γ が数論的であることと同値であろう。

ここで「ほとんどすべて」と言っているのは、それが成り立たない Γ の全体からなる集合がタイヒミュラー空間の中で低次元になってしまうという意味である。この予想は、ほとんどすべての場合にセルバーグの定理１の第一項が有界であることを意味しているから、必然的に第二項が主要項となり、連続スペクトルがスペクトルの大半を尽し、それに比べて離散スペクトル（すなわちカスプ形式）は非常に少ないことを主張している。確かに、セルバーグの定理２より、Γ が合同部分群の時には第１項が主要項であったが、そのような数論的な Γ というのは、その意味では、極めてまれな存在なのである。

セルバーグの予想とサルナックの予想、この相反する二つのうち、果たしてどちらが正しいのであろうか？ この問題の最終的な解決は、まだ得られていない。しかし、近年の研究結果は、サルナックの予想を裏付ける方向に傾きつつある。例えば、昨年、ジャッジにより次の定理が証明された。

ジャッジの定理[J]
ヘッケの三角群 $T(m) \quad (m > 2)$ のうちで、離散スペクトルを無限に持つものは、重複度仮説の下で、高々可算個しか存在しない。

重複度仮説というのは、ある特殊な合同部分群のラプラシアンのすべての固有値の重複度が１であるだろうという予想で、これまでに得られている数値例から、その正当性が予想されている。ヘッケの三角群 $T(m)$ とは、行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 2\cos\dfrac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の二元により生成される、$SL(2,\mathbf{R})$ の部分群であり、$m=$ ３、４、６ の時は $T(m)$ は数論的になるが、それ以外の時には非数論的になることが知られている。

サルナックの予想は、カスプ形式が豊富に存在することは非常に珍しいことであるというニュアンスを主張している。更に、この主張はΓが数論的な場合ですら有効であるように見える。それは、合同部分群 $\Gamma(2)$ に指標をつけた保型形式を考える時、指標は $\chi(\eta)$ $(0<\eta<1)$ と実数ηを用いてパラメタライズされるが、そのうちセルバーグの定理２の式を満たすようなηは高々可算個しかないことが、フィリップスーサルナック[PS3]により重複度仮説の下で証明されているからである。

もしサルナックの予想が正しいとすれば、古来から謎とされてきた、カスプ形式の具体的な表示が得られない問題も、もはや問題ではなくなる。すなわち、カスプ形式自体が、一般にはほとんど存在しない対象であるのだから、その統一的な表示など、あるはずがないのである。その代わり、カスプ形式即ちラプラシアンの離散スペクトルは、その存在自体が非常に特殊であり、数論的な特徴を表していると考えられる。従って、λの分布やその固有関数の振舞いを調べることは、本質的に数論に深く関わる問題と思われる。これが数論的量子カオスという研究の、二つ目の動機である。

散乱行列式

前の二節で登場した散乱行列式φについて解説する。φは、Mが非コンパクトであるようなΓに対して定義されるものであるが、ここでは特にMの体積が有限である場合を扱う。この場合、Mが非コンパクトであることから、その姿は、直観的には無限に伸びている部分を含むと思われるが、体積が有限という条件から、その伸びている部分は先に行くと急激に先細りになっていることがわかる。このような、細長く伸びている部分（の極限点）をカスプと言う。

カスプは、非コンパクト性すなわち連続スペクトル発生の原因である。連続スペクトルの固有関数はカスプを決めるごとに与えられる。これを、そのカスプのアイゼンシュタイン級数と呼ぶ。例えば、$\Gamma = SL(2,\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbf{Z},\, ad-bc=1 \right\}$ の場合、Mは上半平面Hのy軸の $y \geq 1$ なる部分を含む領域とみなすことができ（図１）、カスプは $i\infty$ （y軸の先の方）ただ一つとなる。このカスプのアイゼンシュタイン級数は次で定義される。

$$E(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \mathrm{Im}\left(\gamma\langle z \rangle\right)^s = \sum_{\substack{c>0,\ (c,d)=1 \\ c=0,\ d=1}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \qquad \left(z \in H,\ \mathrm{Re}(s) > 1\right)$$

ここで、$\gamma\langle z\rangle$ とは γ が一次分数変換で上半平面に作用した時の z の像であり、Γ_∞ はその作用でカスプ $i\infty$ を固定する元の全体からなる部分群である。$E(z,s)$ が連続スペクトルの固有関数になっていることは、次のように考えるとわかりやすい。まず、γ が単位元の場合、和の中身は y^s となるが、これは、冒頭で与えた Δ を用いて容易に $\Delta y^s = s(1-s)y^s$ と計算されることから、形式的に連続スペクトルの固有関数になることはわかる。（また、固有値 $s(1-s)$ が $s \leftrightarrow 1-s$ で不変であることは、アイゼンシュタイン級数の関数等式を示唆している。）これが実際に $M = \Gamma \backslash H$ 上の関数になるには、Γ の作用に関する不変性が必要となるため、あらかじめすべての γ をかけておいて Γ の作用に関して平均化しておけば良い。ただし、今の目的のためにはカスプが重要であり、カスプを動かさないような作用は無視してよいから Γ_∞ で割って考えればよいというわけである。

Γ_∞ は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という元で生成される無限巡回群である。アイゼンシュタイン級数 $E(z,s)$ は、Γ の z への作用に関して不変、すなわち $E(\gamma\langle z\rangle, s) = E(z,s)$ となるから、特に $E(z+1,s) = E(z,s)$ となる。これより、$E(z,s)$ は z の実部 x に関する基本周期１の周期関数 $e^{2\pi i x}$ を用いて次のように展開できる。

$$E(z,s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{2\pi i m x}$$

これを、フーリエ展開と呼び、$a(m)$ をフーリエ係数という。$a(m)$ は m の他に、y 及び s という変数を含んでいることに注意しよう。連続スペクトルの扱いにおいては、特に、０番目のフーリエ係数 $a(0)$ が重要であることが、計算によりわかる。$a(0)$ は y と s の関数であるが、s に関しては先程見たように関数等式が $s \leftrightarrow 1-s$ で成立し、次のような形で表される。

$$a(0) = y^s + \varphi(s) y^{1-s}$$

ここで出てきた φ を、$\Gamma = SL(2,\mathbf{Z})$ の散乱行列式と呼ぶ。

ここまで、カスプが $i\infty$ ただ一つであるような群 $\Gamma = SL(2,\mathbf{Z})$ について考えてきたが、一般の有限体積の非コンパクトな M は、複数個のカスプを持ち得る。n 個のカスプがある場合に、各カスプのアイゼンシュタイン級数を $E_i(z,s)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ と置き、それぞれの級数を j 番目のカスプ（の固定部分群の生成元）に関してフーリエ展開した時のフーリエ係数を $a_{ij}(m)$ と置く。先程と同様に、$a_{ij}(0) = y^s + \varphi_{ij}(s) y^{1-s}$ となり、ここで得た行列

$$\Phi(s) = (\varphi_{ij}(s))$$

を Γ の散乱行列と言う。$\varphi(s) = \det(\Phi(s))$ を散乱行列式と呼ぶのである。これは、その作り方から、（アイゼンシュタイン級数の）定数（項）行列式と呼ぶ人もいる。

散乱行列式は一般ディリクレ級数の形で表され、全平面に s の関数として有理型に接続

されることは知られている。散乱行列式の具体的な形を求めるには、剰余類分解 $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ を具体的な形で書き下し、更に０番目のフーリエ係数を計算しなくてはならない。これは一般には非常に困難なことであり、これまでに知られている場合はわずかに以下の数例に過ぎない。

１）$\Gamma = SL(2,\mathbf{Z})$ の場合[Se1]

$$\varphi(s) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}$$

リーマン・ゼータのガンマ因子 $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ を無限素点のオイラー因子とみなして、完備リーマン・ゼータ $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ を用いて考えれば、これは

$$\varphi(s) = \frac{\hat{\zeta}(2s-1)}{\hat{\zeta}(2s)}$$

と簡単な形に表される。

２）$\Gamma = \Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$ の場合[Hej，Hu]
１の完備リーマン・ゼータの代わりに、Nを法とする完備ディリクレ L関数の積で表されることが、ヘッジェル、ハックスレーにより知られている。

３）$\Gamma = SL(2,O_K)$ の場合 （O_Kは虚二次体 Kの整数環）[ES]

１の例の完備リーマン・ゼータの代わりに、Kのヒルベルト類体の完備デデキンド・ゼータを用いて表されることが、エフラットーサルナックにより知られている。ちなみに、この証明は、アイゼンシュタイン級数とヒルベルト類体の一般的な性質を利用したもので、剰余類分割や積分計算という繁雑な手順をほとんど踏むことなく、鮮やかに散乱行列式を求めている。

４）非合同部分群の場合[E1]

非合同部分群に関する結果はほとんど得られていないが、唯一エフラットが非常に特殊な非合同部分群の散乱行列式を、デデキンド・ゼータの複雑な積で書き下した結果がある。

最近の進展 ----- 最先端からの報告 ------

以下に、数論的量子カオスの分野で実際に得られている新結果を報告する。

１）λのばらつきに関して

固有値λのばらつきを表す関数（number variance）が、古典的にはポアソン分布かランダム行列理論におけるモデル GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) に従う場合がそれぞれ知られていたが、数論的なΓの場合は、その二つの分布の双方にまたがるような分布を呈することが、数値計算によりわかった（図２）。ルオ-サルナック[LS1]は、この不思議な現象に関する、初の理論的サポートを与えた。

２）固有関数 ϕ_λ の値分布に関して

量子力学においては、ラプラシアンのような自己共役作用素は物理量に対応し、その固有関数は確率振幅を表す。そこでは量子化した系でプランク定数 $\hbar \to 0$ とした極限を semi-classical limit と呼び、興味の対象としているが、これを求めるには固有値λを限りなく大きくした時の極限を求めれば良いことが知られている。これまでにいくつかの大きな固有値λに対する固有関数ϕ_λの値分布が計算され、一部の物理学者の間では、絶対値が大きくなる部分（確率が高くなる場所）は、Mの測地線を描くのではないか（図３）と言う予想が提出されていた[H]。ルドニック-サルナック[RS1]は、こうした予想が誤りであることを証明した。

３）ϕ_λ の L^p-ノルムに関して

前項で述べた量子力学からの興味、及び、L^∞-ノルムの究極的な評価（L^∞-予想）は、リーマン・ゼータのリンデレーフ予想を含むことなどから、$p=\infty$の場合が特に重要である。イワニッチ-サルナック[IS]、小山[K3]は、二次元、三次元の数論的多様体に関し、L^∞-ノルムの評価をそれぞれ改良した。

４）量子エルゴード性

$|\phi_\lambda|$ の値は、λが大きくなると次第に振幅が大きくなり、その変化は急激かつ均一的に

なる（図４）と考えられている。これを量子エルゴード性と言う。この性質は、二次元のモジュラー多様体に関してはゼルディッチ[Z]及びルオ-サルナック[LS2]が証明した。

５）素測地線定理への応用

量子エルゴード性のあるバージョンは、対応するランキンーセルバーグ・ゼータの平均リンデレーフ予想と同値になる。これより、素測地線定理の誤差項の評価を得ることができる。[LS2]

６）リーマン・ゼータの零点分布

リーマン・ゼータの零点の虚部の分布が、ランダム行列理論で得られるある関数で表されることは予想されていた（図５）が、ルドニックーサルナック[RS2]はこれを部分的に証明した。

おわりに

セルバーグが定理１、２を証明し、予想を提出したのは１９５０年代である。この研究が、スペクトル論的数論とも言うべき分野の端緒となった。本文では、セルバーグの予想に不利な状況の解説が中心となってしまったが、その時代に数論とスペクトルと言う、全く異質のものの間の類似を発見し、Ｓ型ゼータを初めて定義してこの分野を切り拓いたセルバーグの業績は、驚嘆すべきである。Ｓ型ゼータ（セルバーグ・ゼータ）は、今世紀の数学で最大の発見であると言う人もいるほどである。

セルバーグによって見出された類似そのものが、群の数論性を本質的にあらわしていることを見抜いたサルナックは、セルバーグ理論をより深め、より広い分野と影響しあう存在に高めたと言える。

セルバーグからサルナックへ----- この二人の天才の世代の間には、数論が従来の枠から脱却して、幾何学、スペクトル理論、タイヒミュラー空間論、エルゴード理論、そして量子力学という、多くの分野と連携する存在に急速に成長した時代の変遷を見ることができよう。

参考文献

[E1] I. Efrat, On the automorphic forms of a noncongruence subgroup, Michigan Math. J. 34 (1987), 217-226

[E2] ________, Determinants of Laplacians on surfaces of finite volume, Comm. Math. Phys. 119 (1988), 443-451, Erratum 138 (1991), 607

[ES] I. Efrat and P. Sarnak, The determinant of the Eisenstein matrix and Hilbert class fields, Trans. Amer. Math Soc. 290 (1985), 815-824

[Hej] D. Hejhal, Selberg trace formula for PSL(2,R), Lect. Notes in Math, Springer

[H] E.J. Heller, In: Chaos and quantum physics, Les Hauches (1989), (ed. by M.J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin), North-Holland (1991), 549-661

[Hu] M. N. Huxley, Scattering matrices for congruence subgroups, In: Modular Forms (ed. by R. A. Rankin) Ellis Horwood (1984), 141-156

[I] 伊原康隆,「素因子と共役類（１）」, 数学の歩み 12 (1967), 103-114

[IS] H. Iwaniec and P. Sarnak, L-infinity-norms of eigenfunctions for arithmetic surfaces, Ann. of Math. (to appear)

[J] C. Judge, The Roelcke-Selberg conjecture for surfaces with cone points, preprint (1994)

[K1] S. Koyama, Determinant expression of Selberg zeta functions (I), Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), 149-168

[K2] __________, Determinant expression of Selberg zeta functions (II), Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 755-772

[K3] __________, L-infinity-norms of eigenfunctions for arithmetic hyperbolic 3-manifolds, Duke Math. J. 77 (1995)

[Ku1] N. Kurokawa, Parabolic components of zeta functions, Proc. Japan Acad. 65A (1988), 21-24

[Ku2] 黒川信重,「オイラー積の２５０年（下）」 数学セミナー １０月号 (1988),

67-74

[Ku3] ________, 「素粒子と素数」 数理科学 １１月号 (1986)、64-69

[Ku4] ________, 「無限次行列式」 数理科学 ４月号 (1995)

[LS1] W. Luo and P. Sarnak, Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces, Comm. Math. Phys. 161 (1994), 419-432

[LS2] __________, Quantum ergodicity of eigenfunctions on H/SL(2,Z), (1994), preprint

[PS1] R.S. Phillips and P. Sarnak, On cusp forms for cofinite subgroups of PSL(2, R), Invent. Math 80 (1985), 339-364

[PS2] _____________, The Weyl theorem and the deformation of discrete groups, Comm. Pure and Appl. Math 38 (1985), 853-866

[PS3] _________, Cusp forms for character varieties, Geom. Funct. Anal. 4 (1994), 93-118

[RS1] Z. Rudnick and P. Sarnak, The behavior of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds, Comm. Math. Phys. 161 (1994), 195-213

[RS2] _____________, The n-level correlations of zeros of the zeta function, C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 1027-1032

[S1] P. Sarnak, Determinants of Laplacians, Comm. Math. Phys. 110 (1987), 113-120

[S2] _________, Arithmetic quantum chaos, The R.A. Blyth Lecture, Univ. of Toronto (1993)

[Se1] A. Selberg, Harmonic Analysis (1954), Collected Papers Vol 1.

[Se2] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric

Riemannian surfaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47-87

[V] A. Voros, Spectral functions, special functions, and the Selberg zeta function, Comm. Math Phys. 110 (1987), 439-465

[Z] S. Zelditch, Memoirs of Amer. Math. Soc. 495 (1992)

添付図