これが発散するのだから，

$$\sum_{p:\,素数} \frac{1}{p} = \infty$$

が成り立つ．

この別証明の過程で得た式

$$\prod_{p:\,素数} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \infty$$

を用いると，次のような新たな結論も得られる．

系 1.5

$$\lim_{x \to \infty} \prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0.$$

証明 定理 1.3 で $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ であることをみたが，一方，

トル

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \prod_{p:\,素数} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p:\,素数} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

であるから，この値が有限であることと，~~上の証明で得た~~

$$\prod_{p:\,素数} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \infty$$

より，

$$\prod_{p:\,素数} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cancel{= 0}$$

でなくてはならない．

$$= \prod_{p:\,素数} \frac{p-1}{p} \le \prod_{p} \frac{p}{p+1} = \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = 0$$

この結論は，$\frac{1}{p}$ が 1 に近いような素数，すなわち，比較的小さな素数 p が豊富に存在することを意味しているから，やはり素数の個数がある程度「大きな無限大」である現象を表している．次節の証明中で，この系を用いる．

さて，私たちは自然数の逆数の和について，定理 1.2 で発散を示しただけでなく，その発散の度合いを数式で表した．定理 1.4 で扱った素数の逆数の和についても同様の問題が考えられる．素数の逆数和の発散の度合いは，どれくらいなのだろうか．その答えは，

$$\sum_{\substack{p \le x \\ p:\,素数}} \frac{1}{p} \sim \log\log x \qquad (x \to \infty)$$

となる（定理 1.17）．この事実はオイラー (1737) によって初めて見出され，後にガウス (1791) によっても指摘されていたが，現代数学の言葉で厳密な証明を与えたのはメルテンス (1874) が最初である．メルテンスの証明は多少複雑であるため，ランダウ (1909) によって与えられた初等的証明を，1.4 節で紹介する．初等的とは言っても，その内容は本章の範囲を若干超えるものであり，一部，次章で紹介する定理（部分和の公式，定理 2.29，2.32）を引用する．

1.2 素数の占める割合が 0% であること

前節では「素数が無数にある」というユークリッド以来知られてきた事実を改良し，素数の個数の無限大がある程度「大きな無限大」であることを示した．本節では逆に「大きいとはいえ全体に比べるとまだまだ小さい」ことを示す．

自然数の全体からなる集合の無限部分集合として，真っ先に思いつくのは「偶数全体の集合」「奇数全体の集合」などだろう．これらはいずれも，2 個に 1 個の割合で永遠に出現し続けるから，自然数全体の中で 50% を占めるといえる．少し一般化して「5 で割って 1 余る自然数の集合」は，5 個に 1 個の割合で永遠に出現し続けるから，20% を占めるといえる．元来，パーセントや確率と

$x \leq 3000$ に対してもこれを個別に数値計算で確かめると，$x \geq 350$ ならば同じ不等式が成り立つことがわかる．

(i) を示すには，補題 1.10 より，任意の t に対して

$$\psi(t) - \psi\left(\frac{t}{6}\right) \leq \alpha(t)$$

が成り立つことを用いる．$t = \frac{x}{6^j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ にこれを適用し，$\psi(x)$ を以下のように変形する．

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\psi\left(\frac{x}{6^j}\right) - \psi\left(\frac{x}{6^{j+1}}\right)\right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty}\alpha\left(\frac{x}{6^j}\right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} 0.9353 \cdot \frac{x}{6^j} \\
&\leq 1.1224x.
\end{aligned}$$

以上では $x \geq 350$ としていたが，$2 \leq x < 350$ に対しては最後の不等式を個別に数値計算で確かめることにより，$\psi(x)$ に関する同じ不等式が成り立つことがわかる．ここで得た $\psi(x)$ に関する不等式を，補題 1.8(iii) を用いて $\theta(t)$ に関するものに書き換えれば，(i) の証明が完了する．

次に (ii) を示す．上でみたように，$x \geq 350$ に対して

$$0.9072x \leq \alpha(x)$$

が成り立ち，さらに補題 1.10 と合わせると

$$0.9072x \leq \psi(x)$$

となる．補題 1.8(iii) より

$$0.9072x - \sqrt{x}\log x \leq \psi(x) - \sqrt{x}\log x \leq \theta(x).$$

3000

任意の $x > \cancel{0}$ に対して $\sqrt{x}\log x < 0.15x$ が成り立つから，

$$\theta(x) > 0.9072x - 0.15x > 0.75x.$$

$x > 3000$ ≤ 3000

以上で $\cancel{x \geq 350}$ に対する証明が終わったが，$37 \leq x \cancel{< 350}$ に対しては個別に数値計算で確かめることにより，$\theta(x) > 0.73x$ が成り立つことがわかる． ■

この系で (ii) の条件として設定した $x \geq 37$ は，定数 A_2 を必要に応じて小さく取れば，外すことが可能である．$x < 37$ なる各 x に対し，不等式が成立するような A_2 を個別に選びなおし，それらの中で最小のものを選べばよいからだ．したがって，ある定数 A_1, A_2 が存在して，任意の $x \geq 2$ に対して

$$A_2 x \leq \theta(x) \leq A_1 x$$

が成り立つ．また，このことから明らかに，次の系が成り立つ．

系 1.12 x 以下のすべての素数の積を $P(x)$ と置く．ある定数 B_1, B_2 が存在して，任意の $x \geq 2$ に対して

$$B_2^x \leq P(x) \leq B_1^x$$

が成り立つ．

定理 1.13（**粗い素数定理（チェビシェフ，1850 年頃）**） $x > 0$ に対し，x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とする．ある正の定数 C_1, C_2 が存在し，任意の $x \geq 2$ に対し次の不等式が成り立つ[4]．

$$C_2\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq C_1\frac{x}{\log x}.$$

証明 はじめに，任意の $x \geq 2$ と任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し

$$\frac{\theta(x)}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\theta(x)}{\log x} + x^{1-\varepsilon}$$

[4] この定理の主張は，$C_2 \leq \liminf_{x\to\infty}\pi(x)/(\frac{x}{\log x}) \leq \limsup_{x\to\infty}\pi(x)/(\frac{x}{\log x}) \leq C_1$ であり，本来の素数定理とは $C_1 = C_2 = 1$ が成り立つことである．そこまで明確に C_1, C_2 が定まらず極限に幅がある状態を，本書では「粗い素数定理」と呼んでいる．なお，チェビシェフの原論文では「仮に極限値が存在すれば $C_1 = C_2 = 1$ に限る」という事実も証明されている．

が成り立つ．自然数 M を十分大きく選んで

$$\{b_1, \ldots, b_L\} \subset \{a_{n,m} \mid 1 \le n \le M,\ 1 \le m \le M\}$$

となるように取る．すると，任意の $L_1 \ge L,\ M_1 \ge M,\ N_1 \ge M$ に対して不等式

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{M_1} a_{n,m} - \sum_{l=1}^{L_1} b_l \right| \le |b_{L+1}| + |b_{L+2}| + \cdots + |b_{L+j}| < \varepsilon$$

が，j を十分大きく選んで $L_1 < L + j$ かつ

$$\{a_{n,m} \mid 1 \le n \le N_1,\ 1 \le m \le M_1\} \subset \{b_1, \ldots, b_L, \ldots, b_{L+j}\}$$

となるように取れば，成立する．ここで，$L_1 \to \infty$ とすれば，極限値

$$B = \sum_{l=1}^{\infty} b_l$$

が存在することから，不等式

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{M_1} a_{n,m} - B \right| \le \varepsilon$$

が成り立ち，n, m にわたる有限和の順序を入れ替えた

$$\left| \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{N_1} a_{n,m} - B \right| \le \varepsilon$$

も成り立つ．各不等式でそれぞれ $M_1 \to \infty,\ N_1 \to \infty$ とすれば

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} s_n - B \right| \le \varepsilon, \qquad \left| \sum_{m=1}^{M_1} v_m - B \right| \le \varepsilon$$

となる．よって，二つの極限値

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

は共に B に収束する．■

例 2.7　リーマン・ゼータ関数のオイラー積

$$\zeta(s) = \prod_{p:\,素数} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

の収束性を論じたいとき，両辺の対数を取り，

$$\log \zeta(s) = \sum_{p:\,素数} \log(1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{p:\,素数} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ms} m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(k)}{k^s}$$

と変形する．ただし $\Lambda_1(k)$ は，マンゴルト関数

$m p^{ms}$

$$\Lambda(k) = \begin{cases} \log p & (k = p^m \text{ とある素数} p \text{ と自然数} m \text{ で表されるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{2.33}$$

、$\dfrac{1}{m p^{ms}} = \dfrac{\Lambda_1(p^m)}{p^{ms}}$ であ

を用いて

$$\Lambda_1(k) = \frac{\Lambda(k)}{\log k}$$

と定義される．このとき，$k = p^m$ の関係により，（小さい方から）l 番目の素数べきから「n 番目の素数 p の m 乗」を表す自然数の組 (n, m) への対応

$$\sigma : \mathbb{N} \ni l \longmapsto (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

は全単射である．したがって，ゼータの対数をテイラー展開した二重級数

$$\log \zeta(s) = \sum_{p:\,素数} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ms} m}$$

$m p^{ms}$

に対し，定理 2.33 により，これを

$$\log \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(k)}{k^s}$$

の k にわたる和の収束性に置き換えて考えることが，二重級数が絶対収束する $\mathrm{Re}(s) > 1$ において許される．絶対収束しない領域 $\mathrm{Re}(s) \le 1$ については，より重要であるので，次の注意で述べる．

注意 2.34　オイラー積の収束性がより問題になるのは，絶対収束しない領域においてである．「無限積が収束すれば非零」は（絶対でなく普通の）収束の定義に含まれる．オイラー積が絶対収束でない領域であっても，収束さえ示せれば，それすなわち

$$\log|\zeta(s)| = \sum_{p:\,素数}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}} \qquad (\sigma > 1).$$

一般に，任意の実数 ϕ に対し，

$$3 + 4\cos\phi + \cos 2\phi = 2(1+\cos\phi)^2 \geq 0$$

であるから，

$$3\log\zeta(\sigma) + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)|$$
$$= \sum_{p:\,素数}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3+4\cos(mt\log p)+\cos(2mt\log p)}{mp^{m\sigma}}$$

において，右辺の分子は 0 以上である．よって，

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \qquad (\sigma > 1) \tag{3.10}$$

が成り立つ．これより，

別紙 さしかえ

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq \frac{1}{\zeta(\sigma)^{\frac{3}{4}}|\zeta(\sigma+2it)|^{\frac{1}{4}}}.$$

$\sigma = 1+\varepsilon$ $(0<\varepsilon\leq 1)$ と置くと，

$$\zeta(\sigma) = \zeta(1+\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < 1 + \int_1^{\infty}\frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = 1+\frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{2}{\varepsilon}$$

であるから，

$$\frac{|\zeta(1+\varepsilon+it)|}{\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{1}{|\zeta(1+\varepsilon+2it)|^{\frac{1}{4}}} > \frac{1}{2\varepsilon^{\frac{1}{4}}|\zeta(1+\varepsilon+2it)|^{\frac{1}{4}}}.$$

ここで，$\varepsilon \to 0$ とするとき，右辺の因子 $|\zeta(1+\varepsilon+2it)|^{\frac{1}{4}}$ は $t\neq 0$ ならば有限の値に収束するので，右辺の分母は $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ によって 0 に収束し，右辺は $+\infty$ に発散する．よって，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{|\zeta(1+\varepsilon+it)|}{\varepsilon} = \infty$$

である．

ここで定理を示すために，証明すべき結論が成り立たず，ある $t\neq 0$ に対して $\zeta(1+it)=0$ であると仮定する．このとき，$\zeta(s)$ が $s=1+it$ において正則であることから，

$$|\zeta'(1+it)| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\zeta(1+\varepsilon+it)-\zeta(1+it)}{\varepsilon}\right| = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{|\zeta(1+\varepsilon+it)|}{\varepsilon}$$

が存在する．これは上の結論に矛盾する． ■

この定理により，これまでオイラー積の絶対収束域によって得られていたゼータの非零領域 $\mathrm{Re}(s)>1$ を，境界 $\mathrm{Re}(s)=1$ まで拡張した．これをさらに $\mathrm{Re}(s)=c$ $(c<1)$ まで拡張する問題は未解決である．

それでは，境界 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上でのオイラー積の様子を述べよう．$s=1$ で発散することは既にみたので，以下では $s\neq 1$ の場合を扱う．

定理 3.9 **($\mathrm{Re}(s)=1$ 上のオイラー積)** リーマン・ゼータ関数のオイラー積表示 (2.13) は，$\mathrm{Re}(s)=1$ $(s\neq 1)$ において収束する．

証明 $s=1+it$ $(t\neq 0)$ に対し，以下の (I)〜(IV) を順に示していく．

(I) $$\sum_{1\leq n\leq x}\frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to\infty).$$

(II) $$\sum_{1\leq n\leq x}\frac{\log n}{n^s} = -\zeta'(s) - \frac{1}{(s-1)^2x^{s-1}} - \frac{\log x}{(s-1)x^{s-1}} + O\left(\frac{\log x}{x}\right) \qquad (x\to\infty).$$

(III) $$\sum_{1\leq n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = O(1) \qquad (x\to\infty)$$

(IV) オイラー積 (2.13) は s において収束する．

(I) の証明 定理 2.5 において $f(r)=r^{-s}$, $m=[x]$, $n\to\infty$ とし，整数の記号 r を n に書き換えると，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{n^{s+k}}\right| \leq \frac{1}{2^{\sigma+k}}+\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\sigma+k}}$$
$$=\frac{1}{2^{\sigma+k}}+\frac{1}{(\sigma+k-1)2^{\sigma+k-1}}$$
$$<\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{k2^{k}} \leq \frac{3}{2^{k+1}}$$

のように，k に関する公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列によって評価できるから，これに二項係数を付けて k にわたらせた無限和は絶対収束する．よって，上の二重和は順序交換が可能であり，

$$\zeta(s)=\zeta(s)+2^{-s}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-s}{k}\sum_{n=2}^{\infty}n^{-s-k}$$
$$=\zeta(s)+2^{-s}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-s}{k}(\zeta(s+k)-1). \qquad (3.17)$$

この式から $k=1$ を取り出して書くと

$$\zeta(s)=\zeta(s)+2^{-s}-s(\zeta(s+1)-1)+\sum_{k=2}^{\infty}\binom{-s}{k}(\zeta(s+k)-1)$$

となる．両辺から $\zeta(s)$ を引き，$\zeta(s+1)$ に関して解くと

$$\zeta(s+1)=1+\frac{2^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\sum_{k=2}^{\infty}\binom{-s}{k}(\zeta(s+k)-1)$$
$$=1+\frac{2^{-s}}{s}+\frac{s+1}{2}(\zeta(s+2)-1)-\frac{(s+1)(s+2)}{6}(\zeta(s+3)-1)+\cdots.$$

s を $s-1$ に置き換えて

$$\zeta(s)=1+\frac{2^{1-s}}{s-1}+\frac{1}{s-1}\sum_{k=2}^{\infty}\binom{-(s-1)}{k}(\zeta(s-1+k)-1) \qquad (3.18)$$
$$=1+\frac{2^{1-s}}{s-1}+\frac{s}{2}(\zeta(s+1)-1)-\frac{s(s+1)}{6}(\zeta(s+2)-1)+\cdots$$

となる．この置き換えによって，これまで $\mathrm{Re}(s)>1$ としていた仮定が

ある多項式 $f(k)$ を用いて $O(f(k))$ となる

$\mathrm{Re}(s)>2$ となったが，ここで (3.18) を精査し，両辺の各々がより広い範囲の s で定義されるかどうかをみてみよう．

はじめに，$\zeta(s)$ の定義域は $\mathrm{Re}(s)>1$ であるから，左辺は $\mathrm{Re}(s)>1$ で定義可能である．次に，(3.18) の右辺の収束性は以下のようになる．まず個々の項についてみると，$\zeta(s-1+k)$ の項は絶対収束域が $\mathrm{Re}(s-1+k)>1$ であるから，$\mathrm{Re}(s)>2-k$ で定義されている．$k\geq 2$ だから，右辺の全項が $\mathrm{Re}(s)>0$ で定義されていることになる．次に，(3.18) の k にわたる無限和は，任意の s に対して $\zeta(s-1+k)-1$ が指数関数的に減少することと，二項係数 $\binom{-(s-1)}{k}$ が k の~~多項式位数である~~ことから，s に関わらず絶対収束する．またこの収束は広義一様であり，極限として得る関数は，正則関数の一様収束極限であるから正則となる．したがって，(3.18) の右辺は，第二項の $s=1$ における極を除き，$\mathrm{Re}(s)>0$ 上で正則となる．よって，(3.18) は左辺が $\mathrm{Re}(s)>1$，右辺が $\mathrm{Re}(s)>0$ で定義され，右辺は $s=1$ における極を除き正則である．これで，$\zeta(s)$ の有理型接続を $\mathrm{Re}(s)>0$ まで得た．

こうして，$\zeta(s)$ の定義域が負の実軸方向に1だけ広がった．このようにひとたび定義域が広がれば，あとは (3.18) を繰り返し用いて全複素平面への解析接続ができる．実際，先ほどの結果から $\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s)>0$ で定義されたので，これを用いて再び (3.18) の右辺の定義域を確認すると，$\mathrm{Re}(s)>-1$ となる．これをさらに左辺に用いれば $\zeta(s)$ の定義域が $\mathrm{Re}(s)>-1$ まで広がり，その結果から，右辺の定義域が $\mathrm{Re}(s)>-2$ となる．これを繰り返せば帰納的に任意の複素数 $s\neq 1$ に対する $\zeta(s)$ の定義を得ることができる．

また，表示 (3.18) から，極は右辺第二項から来る $s=1$ のみであり，位数は1で留数は

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\frac{2^{1-s}}{s-1}=1$$

と求められる． ■

以上が，$\zeta(s)$ の解析接続の初等的証明である．

なお，ここで得た $\zeta(s)$ の解析接続の表示 (3.18) には利点がある．それは，特殊値を容易に計算できることだ．

$$= \frac{T}{2\pi}\log T - \frac{1+\log 2\pi}{2\pi}T + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right) \quad (T \to \infty).$$

これで (I) が示された.

次に (II) を示す．$\mathrm{Im}(\log\zeta(s)) = \arg(\zeta(s))$ より，

$$\int_2^{\frac{1}{2}} \mathrm{Im}\left(\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right) d\sigma = \Big[\arg(\zeta(\sigma+iT))\Big]_2^{\frac{1}{2}}$$
$$= \arg(\zeta(\tfrac{1}{2}+iT)) - \arg(\zeta(2+iT)).$$

ここで，$s = 2+iT$ のとき，絶対収束域内であることから

$$|\arg(\zeta(s))| = |\mathrm{Im}(\log\zeta(s))| \leq |\log\zeta(s)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p:\,素数}\frac{1}{mp^{ms}}\right|$$
$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p:\,素数}\frac{1}{mp^{2m}} = \log\zeta(2)$$

と T に関して有界となるので，

$$\arg(\zeta(\tfrac{1}{2}+iT)) = \int_2^{\frac{1}{2}} \mathrm{Im}\left(\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right) d\sigma + O(1).$$

ここで，補題 4.4 より，

$$\arg(\zeta(\tfrac{1}{2}+iT)) = \sum_{|\gamma_n - T|\leq 1}\int_2^{\frac{1}{2}} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sigma+iT-\rho_n}\right) d\sigma + O(\log T) \ (T \to \infty)$$

トル

おきかえる

$$= \sum_{|\gamma_n - T|\leq 1}\int_2^{\frac{1}{2}} \frac{-(T-\gamma_n)}{(\sigma-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2} d\sigma + O(\log T) \quad (T \to \infty)$$
$$= -\sum_{|\gamma_n - T|\leq 1}\left[\tan^{-1}\frac{\sigma-\beta_n}{T-\gamma_n}\right]_2^{\frac{1}{2}} + O(\log T) \quad (T \to \infty)$$
$$= \sum_{|\gamma_n - T|\leq 1}\left(\tan^{-1}\frac{2-\beta_n}{T-\gamma_n} - \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}-\beta_n}{T-\gamma_n}\right) + O(\log T) \quad (T \to \infty).$$

であり、定積分は $\left[\arg(\sigma+iT-\rho_n)\right]_2^{\frac{1}{2}} = \arg(\tfrac{1}{2}+iT-\rho_n) - \arg(2+iT-\rho_n)$

と計算され、この

~~これらの $\tan^{-1}$ の~~値は有界であり，和の項数は定理 4.1 より $O(\log T)$ $(T \to \infty)$ であるから，

$$\arg(\zeta(\tfrac{1}{2}+iT)) = O(\log T) \quad (T \to \infty)$$

を得る. ■

4.3　解析接続できない例

リーマン・ゼータ関数が解析接続できるという事実が，ゼータ関数論において重要であることは言うまでもない．だが，いったい関数が解析接続されるという現象は，どの程度貴重なものなのだろう．一般のディリクレ級数を，分子の増大度を正規化して適当に与えれば，ディリクレ級数がある右半平面で絶対収束するようにできるが，これが全平面に有理型に解析接続されるという現象は，普通に起きることなのか．それとも滅多に起きない珍しいことなのか．

結論を先に述べると，それは非常に珍しいことであり，これぞまさに数論の価値を表している，とすらいえるのである．全平面への解析接続がなされるためには，ディリクレ級数の分母に現れる整数が，きわめてバランスの取れた数論的に意味のある集合上をわたり，かつ，ディリクレ級数の分子（係数）もまた，整数上の関数として数論的に意味のあるものでなくてはならない．無作為に勝手に与えたディリクレ級数が全平面に解析接続される可能性はほぼ 0 であると言ってよい．

たとえば，リーマン・ゼータ関数の解析接続により，$\zeta(-1)$ は存在し，関数等式を用いれば，$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ とガンマ因子の計算から実際の値 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ を求められる．一方，リーマン・ゼータ関数の定義式 (2.12) に形式的に $s = -1$ を代入すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\cdots$$

となり，$\zeta(-1)$ は「すべての自然数の和」となる．これを称してよく「すべての自然数の和は $-\frac{1}{12}$ である」と言ったりするが，この発言は，明らかに無限大となるゼータの特殊値に無理やり有限値を着せようとしているようなもので